МИНИСТЕРСТВО ПО ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«КОМАНДНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

для слушателей 2 курса факультета заочного обучения

Минск 2008

МИНИСТЕРСТВО ПО ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «КОМАНДНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ»

Кафедра естественных наук

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

для слушателей 2 курса факультета заочного обучения

Минск 2008

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
В 93

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом Государственного учреждения образования «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь.

Составители:

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры естественных наук Гончаренко И.А.;

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественных наук Отчик В.С.;

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры естественных наук Сережкин В.Н.

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры естественных наук Терешенков В.И.

Рецензент:

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики № 3 БНТУ Гурина Т.Н.

В 93 **Высшая математика. Методические указания и контрольные работы для слушателей 2 курса факультета заочного обучения:** учебно-метод. пособ. / сост. И.А. Гончаренко, В.С. Отчик, В.Н.Сережкин, В.И. Терешенков. – Минск: КИИ МЧС Республики Беларусь, 2008. – 45 с.

ISBN 978-985-6839-49-1

Учебно-методическое пособие предназначено для использования при выполнении контрольных работ по высшей математике слушателями 2-го курса факультета заочного обучения.

УДК 51(075.8)
БК 22.11я73

ISBN 978-985-6839- 49 -1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания и контрольные работы составлены в соответствии с учебной программой по высшей математике и предназначены для слушателей факультета заочного обучения. Программой предусмотрено выполнение двух контрольных работ в семестр. В данном пособии приведены варианты заданий для выполнения контрольных работ № 5 – 8.

Контрольные работы призваны закрепить усвоение теоретической части каждого раздела курса (программы). В процессе изучения курса высшей математики на 2 курсе слушатель должен выполнить 4 контрольные работы. Решение задач по контрольным заданиям является проверкой степени усвоения слушателем теоретического курса.

Правила выбора варианта контрольной работы следующие. Номер варианта должен совпадать с двумя последними цифрами зачетной книжки. Если две последние цифры составляют число, большее 20, то от последних двух цифр отнимают число, кратное 20. Например, если две последние цифры зачетной книжки равны 57, то номер варианта контрольной работы равен 57 – 40 = 17. В конце каждой работы должен быть приведен список использованной литературы.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1) контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поля для замечаний рецензента;
2) условия задач своего варианта переписывать полностью, а заданные условия выписать отдельно;
3) для пояснения решения задачи представлять, где это нужно, выполненный аккуратно схематический чертеж;
4) решения задач и используемые формулы должны сопровождаться пояснениями;
5) на титульном листе нужно указывать номер контрольной работы, наименование дисциплины, фамилию и инициалы слушателя, шифр и домашний адрес;
6) при выполнении контрольной работы в пояснениях к задаче необходимо указывать те основные формулы, на которых базируется решение данной задачи;

Контрольные работы, представленные без соблюдения указанных выше правил оформления, а также работы, выполненные не по своему варианту, зачитываться не будут.

При повторном рецензировании работ обязательно представлять работу с первой рецензией.

ПРОГРАММА КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Функции нескольких переменных

Определение функции нескольких переменных. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных. Частные производные. Производная сложной функции. Дифференцирование неявной функции. Полный дифференциал и его применения. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума функции двух переменных. Условный экстремум функции. Метод множителей Лагранжа нахождения условного экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области. Определение особых точек кривой.

Скалярное поле и его характеристики. Производная по направлению и градиент. Векторная функция скалярного аргумента. Производная вектор-функции. Векторное поле и его характеристики.

Кратные и криволинейные интегралы

Двойной интеграл и его свойства. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам. Замена переменной в двойном интеграле. Переход к полярным координатам. Тройной интеграл и его свойства. Сведение тройного интеграла к повторным интегралам. Замена переменной в тройном интеграле. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам. Приложения кратных интегралов.

Криволинейный интеграл 1 рода и его свойства. Вычисление криволинейного интеграла 1 рода. Криволинейный интеграл 2 рода и его свойства. Вычисление криволинейного интеграла 2 рода. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода и их вычисление. Формулы Остроградского – Гаусса и Стокса.

Ряды

Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Степенные ряды. Радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Разложение функции в степенной ряд.

Дифференциальные уравнения

Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Общее и частное решения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения 1 порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка. Метод подстановки и метод Лагранжа решения линейного дифференциального уравнения 1 порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные однородные дифференциальные уравнения и свойства их решений. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами. Метод вариации постоянной для нахождения частного решения неоднородного уравнения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Метод исключения для решения нормальной системы. Решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теория вероятностей и математическая статистика

Предмет теории вероятностей. Пространство элементарных событий. Определение вероятности события. Относительная частота события. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность, формулы Бейеса. Последовательности независимых испытаний. Теоремы Муавра-Лапласа и Пуассона. Закон распределения дискретной случайной величины. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения вероятностей и ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Примеры распределений: биномиальное распределение, распределение Пуассона, равномерное распределение, показательное распределение, нормальное распределение. Закон больших чисел.

Предмет и задачи математической статистики. Способы отбора и представления статистических данных. Эмпирическая функция распределения выборки. Числовые характеристики выборки. Точечная оценка параметров распределения, метод моментов. Интервальные оценки параметров распределения. Определение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной совокупности при известной дисперсии. Распределение χ^2. Статистическая гипотеза. Проверка гипотезы с помощью критерия Пирсона. Линейная корреляция и регрессия.

Понятие о математическом моделировании деятельности органов и подразделений по чрезвычайным ситуациям. Определение вероятности возникновения пожара (взрыва) в пожаровзрывоопасном объекте. Определение уровня обеспечения пожаровзрывобезопасности людей.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

Контрольная работа № 5
Функции нескольких переменных

При вычислении частной производной $\partial z/\partial x$ функции двух переменных $z = f(x, y)$ вторая переменная y считается постоянной величиной. Аналогично, при вычислении частной производной $\partial z/\partial y$ переменная x считается постоянной величиной. Полный дифференциал функции dz вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Частными производными 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных 1-го порядка.

Пусть

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 2,$$

тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 1; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad dz = (2x + y - 2)dx + (2y + x - 1)dy.$$

Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид

$$F_x'(x - x_0) + F_y'(y - y_0) + F_z'(z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F_x'} = \frac{y - y_0}{F_y'} = \frac{z - z_0}{F_z'},$$

где F_x', F_y', F_z' – частные производные функции $F = F(x, y, z)$, вычисленные в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.

Градиент функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M = M(x, y, z)$ равен

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Производная в точке M по направлению вектора $\mathbf{a}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}$.

Пусть $z = x^2 + xy - 2x - y + 2$, $M = M(1, 1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, тогда

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 1,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2,\quad \mathrm{grad} z = \mathbf{i} + 2\mathbf{j},\quad \cos\alpha = 3\big/\sqrt{3^2+4^2} = 3/5, \cos\beta = -4/5.$$

Производная по направлению заданного вектора **a** равна

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 1\cdot(3/5) + 2(-4/5) = -1.$$

Пусть $z = f(x, y)$ – дифференцируемая функция. Точка $M_0 = M(x_0, y_0)$ называется критической точкой, если частные производные первого порядка в этой точке равны 0, или хотя бы одна из них не существует. Обозначим

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0},\ B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}, \Delta = AC - B^2.$$

Если в критической точке $\Delta > 0$, $A > 0$ (или $C > 0$), то в точке M_0 функция имеет минимум; $\Delta > 0$, $A < 0$ (или $C < 0$), то в точке M_0 функция имеет максимум; если $\Delta < 0$, то экстремума нет; если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Задание 4. Найти экстремум функции

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

Решение. Находим частные производные и записываем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решая систему, находим критическую точку $M_0(1, 0)$. Вычисляем частные производные 2-го порядка в этой точке.

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = 2,\quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = 1,\quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = 2.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 = 3 > 0$, $A = 2 > 0$, то в точке M_0 функция z имеет минимум $z_{\min} = f(M_0) = f(1, 0) = -1$.

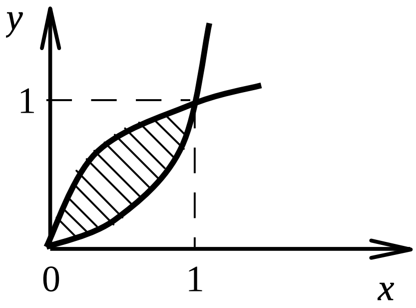
Контрольная работа № 6
Кратные и криволинейные интегралы

Задание 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x + 2y)\,dxdy$$

по области D, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Решение. Указанная область имеет следующий вид



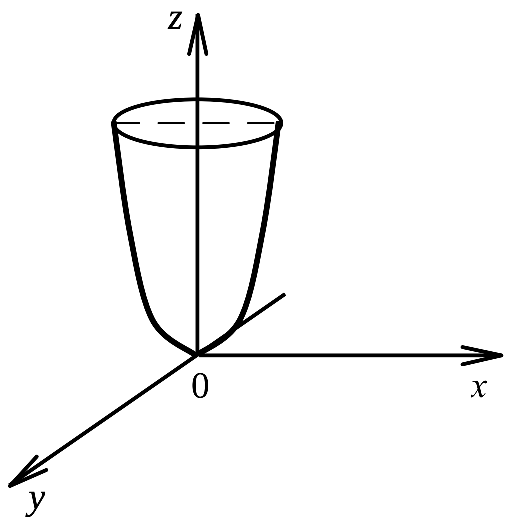
т. е. переменная x изменяется от 0 до 1, а y от x^2 до $\sqrt{x}$. Следовательно,

$$\iint\limits_{(D)} (x+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)dy = \int_0^1 dx \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\,dy + 2\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy \right) =$$

$$\int_0^1 \left(xy\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} + y^2\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^1 \left(x\left(\sqrt{x} - x^2\right) + \left(x - x^4\right)\right) dx = 9/20.$$

Задание 2. Вычислить массу тела, если задана плотность $\gamma = 2(x^2 + y^2 + z^2)$ и тело ограничено поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

Решение. Указанное тело является параболоидом и имеет следующий вид



Массу данного тела определяем по формуле

$$M = \iiint\limits_V \gamma\,(x, y, z,)dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dx\,dy\,dz.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам φ, ρ, z:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z.$$

В этих координатах

$$\gamma = 2\left(\rho^2 + z^2\right), \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \rho \le \sqrt{z}, \quad 0 \le z \le 4.$$

По формуле замены переменной в тройном интеграле имеем

$$M=\iiint\limits_{V'}2\left(\rho^2+z^2\right)\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{4}dz\int\limits_0^{\sqrt{z}}2\left(\rho^2+z^2\right)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{4}\left(\frac{\rho^4}{2}+z^2\rho^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{z}}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{4}\left(\frac{z^2}{2}+z^3\right)dz=\frac{224}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{448}{3}\pi.$$

При вычислении криволинейного интеграла первого рода по кривой L, заданной уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, применяют формулу

$$\int\limits_L f(x,y)dL=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_L y\,dL,$$

где L – отрезок прямой $y = 2x$ между точками $O(0, 0)$ и $A(1, 2)$.

Решение.

$$\int\limits_L ydl=\int\limits_0^1 2x\sqrt{1+4}\,dx=\sqrt{5}x^2\Big|_0^1=\sqrt{5}.$$

Если $F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ – сила, действующая на материальную точку, движущуюся вдоль линии L, то криволинейный интеграл 2-го рода численно равен работе силы F вдоль линии L

$$A=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz.$$

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода сводится к вычислению определенного интеграла. Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\Big(P(x,y(x))+Q(x,y(x)y'(x)\Big)dx.$$

Если функции $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой плоской области D, ограниченной контуром L, то имеет место формула Грина

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

При этом выбирается положительное направление обхода контура.

Задание 4. Найдите работу силы $F = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$, совершаемой при перемещении материальной точки из точки $O(0, 0)$ в точку $A(1, 1)$ по дуге параболы $y = x^2$.

Решение. Искомая работа равна

$$A = \int_0^1 x^3 dx + \left(x + x^2\right)2x\,dx = \int_0^1 \left(3x^3 + 2x^2\right)dx = \frac{17}{12}.$$

В пятом задании требуется вычислить площадь поверхности, используя поверхностный интеграл первого рода

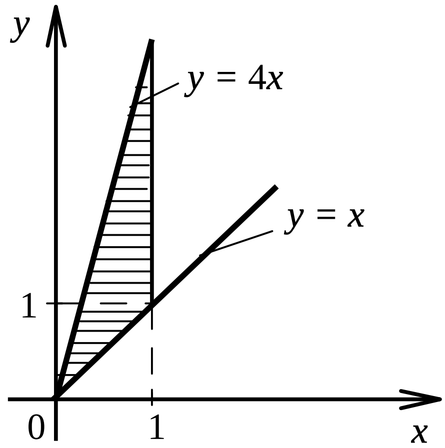
$$S = \iint_G dG.$$

Если поверхность G задана уравнением $z = z(x, y)$ и однозначно проектируется в область D на плоскости Oxy, то поверхностный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле

$$\iint_G f(x, y, z)\,dG = \iint_D f\left(x, y, z(x, y)\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Задание 5. Найти площадь поверхности параболического цилиндра $z = 4 - x^2$, отсеченной плоскостями $y = x$, $y = 4x$, $x = 1$.

Решение. Проекция поверхности D на плоскость Oxy имеет следующий вид.



Согласно приведенной выше формуле

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx \int_x^{4x} dy = \int_0^1 3x\sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \left|1 + 4x^2 = t,\ 8x\,dx = dt\right| =$$

$$= \frac{3}{8}\int_1^5 t^{1/2} dt = \frac{1}{4} t^{3/2}\Big|_1^5 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Контрольная работа № 7
Дифференциальные уравнения и ряды

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет следующий вид

$$y' = f(x)g(y), \quad y' = dy/dx$$

или в дифференциальной форме

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx = f_2(x)\, g_2(y)\, dy.$$

Задание 1. Решить уравнение $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0$.

Решение. Разделив уравнение на xy (предполагая, что $xy \neq 0$), получим уравнение с разделенными переменными

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = -\left(1 + \frac{1}{y}\right)dy.$$

Интегрируя, находим

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = -\int \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy,$$

$$x + \ln|x| = -y - \ln|y| + \ln|C|,$$

$$\ln|xy| + x + y = \ln|C|, \quad \ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln|C|,$$

$$\ln\left|xye^{x+y}\right| = \ln|C|, \quad xye^{x+y} = C.$$

Таким образом, решение данного уравнения получено в виде общего интеграла

$$xy\,e^{x+y} = C.$$

Проверка показывает, что его частными решениями будут также функции $y = 0$ и $x = 0$.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого порядка, называется однородным уравнением. Функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка, если она удовлетворяет условию

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Однородное уравнение решают с помощью подстановки $u = y/x$, $y = ux$, $y' = u + xu'$.

Задание 2. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Решение. После подстановки $y = ux$, получаем уравнение

$$u + xu' = \frac{2u}{1-u^2}, \qquad xu' = \frac{u+u^3}{1-u^2}, \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{u+u^3}{1-u^2}.$$

В итоге получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du = 0, \qquad \ln|x| + \int \frac{u^2-1}{u(u^2+1)}du = \ln|C|,$$

$$\ln|x| + \int \left[\frac{2u}{u^2+1} - \frac{1}{u}\right]du = \ln|C|, \qquad \ln|x| + \ln\left|(u^2+1)\right| - \ln|u| = \ln|C|,$$

$$\ln\left|\frac{x(u^2+1)}{u}\right| = \ln|C|, \qquad x(u^2+1) = Cu.$$

Подставляя в последнее соотношение $u = y/x$, получаем общий интеграл дифференциального уравнения

$$x^2 + y^2 = Cy.$$

При разделении переменных было потеряно решение $u = 0$, т.е. $y = 0$.

К однородному уравнению сводятся также уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Для этого нужно сделать подстановку $u = x + a$, $v = y + b$, $du = dx$, $dv = dy$, где числа a и b являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} a_1a + b_1b + c_1 = 0 \\ a_2a + b_2b + c_2 = 0. \end{cases}$$

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x).$$

Одним из методов решения данного уравнения является метод подстановки. Решение уравнения ищется в виде $y = u \cdot v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неизвестные функции. Этот же метод используется при решении уравнения Бернулли

$$y' + p(x)y = f(x)y^n.$$

Задание 3. Найти общее решение уравнения

$$y' + \operatorname{tg}x\, y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Для решения уравнения сделаем подстановку

$$y = u\,v, \quad y' = u'v + u\,v',$$

$$u'v+uv'+uv\,\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos x},\qquad u\left(v'+v\,\mathrm{tg}x\right)+u'v=\frac{1}{\cos x}.$$

Функцию v подберем так, чтобы $v'+v\,\mathrm{tg}x=0$. Разделяя переменные в этом уравнении, получим

$$\frac{dv}{v}=-\mathrm{tg}x\,dx,\qquad \int\frac{dv}{v}=-\int\mathrm{tg}x\,dx,\qquad \ln|v|=\ln|\cos x|,\qquad v=\cos x.$$

Для нахождения функции u необходимо решить уравнение

$$u'v=\frac{1}{\cos x},$$

где $v=\cos x$. Имеем

$$u'\cos x=\frac{1}{\cos x},\qquad u'=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad u=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C.$$

Общее решение исходного уравнения имеет следующий вид

$$y=u\cdot v=\left(\mathrm{tg}\,x+C\right)\cos x=\sin x+C\cos x.$$

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями высших порядков. Одним из основных методов интегрирования таких уравнений является метод понижения порядка уравнения.

Уравнение вида

$$y^{(n)}=f(x)$$

решаются с помощью последовательного интегрирования правой части

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1=f(x,\,C_1),\qquad y^{(n-2)}=\int f(x,C_1)dx+C_2 \text{ и т. д.}$$

Порядок уравнения $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)})=0$ понижается при помощи подстановки

$$u=y^{(k)},\ u'=y^{(k-1)},\ \ldots .$$

Порядок дифференциального уравнения вида $F(y, y', \ldots, y^{(n)})=0$ можно понизить, если ввести новую функцию

$$p=p(y)=y'.$$

В этом случае

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=pp',\qquad y'''=pp''+p\left(p'\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Задание 4. Решить дифференциальное уравнение $xy''=y'$.

Решение. Так как данное уравнение не содержит функции y, то порядок уравнения можно понизить при помощи подстановки $u=y'$, $u'=y''$. В результате получим уравнение с разделяющимися переменными

$$x \cdot u' = u, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|xC|,$$

отсюда

$$u = \frac{dy}{dx} = Cx, \quad dy = C\,x\,dx, \quad y = \frac{Cx^2}{2} + C_1.$$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p и q – некоторые числа.

Общее решение неоднородного уравнения имеет следующую структуру

$$y = \bar{y} + y^*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, а y^* – частное решение неоднородного уравнения. Для нахождения общего решения однородного уравнения составляют характеристическое уравнение

$$l^2 + pl + q = 0.$$

Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $l_1 \neq l_2$, то общее решение имеет вид

$$\bar{y} = C_1 e^{l_1 x} + C_2 e^{l_2 x}.$$

Если характеристическое уравнение имеет один корень $l = l_1 = l_2$, то

$$\bar{y} = e^{lx}(C_1 + C_2 x).$$

Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни $l_{1,2} = a \pm b\,i$, то

$$\bar{y} = e^{ax}(C_1 \sin b\,x + C_2 \cos b\,x).$$

Для нахождения частного решения y^* применяют метод вариации произвольных постоянных или метод неопределенных коэффициентов. Пусть

$$f(x) = P_n(x)e^{ax},$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n. Тогда частное решение ищется в виде

$$y^* = x^s P_n(x)e^{ax},$$

где $s = 0$, если a не является корнем характеристического уравнения; $s = 1$, если a – однократный корень, т. е. $a = l_1$ или $a = l_2$; $s = 2$, если a – двухкратный корень, т. е. $a = l_1 = l_2$. Пусть теперь

$$f(x) = P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx.$$

Если $b\,i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение y^* ищется в виде

$$y^* = R_k(x)\cos bx + S_k(x)\sin bx,$$

где $k = \max\{m, n\}$; $R_k(x)$, $S_k(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами. Если $b\,i$ – корень характеристического уравнения, то частное решение y^* ищется в виде

$$y^* = x\left(R_k(x)\cos bx + S_k(x)\sin bx\right).$$

При выполнении задания 5 следует иметь в виду, что если правая часть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $y^* = y_1^* + y_2^*$, где $y_1^*\left(y_2^*\right)$ – частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$ (соответственно $f_2(x)$).

Задание 5. Найти общее решение уравнения $y^{//} + y = \sin x$ и решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y^{/}(0) = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $l^2 + 1 = 0$. Оно имеет чисто мнимые корни $l_1 = i$, $l_2 = -i$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения является функция

$$\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Так как в данном случае $b\,i = i$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде

$$y^* = x\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Подставляя в исходное уравнение производные

$$y^{*/} = \left(A + Bx\right)\cos x + \left(B - Ax\right)\sin x,$$

$$y^{*//} = \left(2B - Ax\right)\cos x - \left(2A + Bx\right)\sin x,$$

получаем равенство

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x.$$

Отсюда следует, что

$$-2A = 1,\ 2B = 0,\ A = -0{,}5,\ B = 0,\ y^* = -0{,}5x\cos x.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - 0{,}5x\cos x.$$

Для нахождения частного решения нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y^{/}(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = 1 \\ -C_1\sin 0 + C_2\cos 0 - 0{,}5\cos 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 - 0{,}5 = 0. \end{cases}$$

Следовательно $C_1 = 1$, $C_2 = 0{,}5$ и требуемое частное решение имеет следующий вид:

$$y = \cos x + 0{,}5\sin x - 0{,}5x\cos x.$$

При интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений можно применить метод исключения.

Задание 6. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2z - y \end{cases}.$$

Решение. Дифференцируя первое уравнение, получим $y'' = z'$. Подставляя в это уравнение значение $z' = 2z - y$, где $z = y'$, получим уравнение $y'' = -y + 2y'$. В итоге, для определения неизвестной функции y необходимо решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет один корень $\lambda = 1$ кратности 2. Следовательно,

$$y = e^x(C_1 + C_2 x),$$

$$z = y' = e^x(C_1 + C_2 + C_2 x).$$

Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где u_1, u_2, … – последовательность чисел, называется числовым рядом. Сумма

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

называется частичной суммой ряда. Если существует конечный предел частичных сумм

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

то ряд называется сходящимся, а сам предел S – его суммой.

Для исследования сходимости ряда применяют признаки сходимости.

Признак Даламбера. Если все члены ряда положительны и существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = s,$$

то при $s < 1$ ряд сходится, а при $s > 1$ – расходится.

Признак Коши. Если все члены ряда положительны и существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ – расходится.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad u_n > 0$$

называется знакочередующимся.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда удовлетворяют условиям:

$$1)\ u_1 > u_2 > u_3 > \ldots;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

то ряд сходится. Остаток ряда $R_n = S - S_n$ удовлетворяет неравенству $|R_n| < u_{n+1}$.

Задание 7. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}.$$

Решение. В данном случае $u_n = n\cdot 2^{-n}$, $u_{n+1} = (n+1)\cdot 2^{-n-1}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{-n-1}}{n\cdot 2^{-n}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд сходится.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \text{или} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (a=0).$$

Радиусом сходимости ряда называется число R, такое, что при $|x-a| < R$ ряд сходится, а при $|x-a| > R$ – расходится. Радиус сходимости можно вычислить по одной из формул:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}\ , \qquad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Задание 8. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Решение. Находим радиус сходимости R. Так как $c_n = 1/n$, $c_{n+1} = 1/(n+1)$, то

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд сходится в интервале (–1, 1). Исследуем сходимость в концевых точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем гармонический ряд, который расходится. При $x = -1$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, область сходимости данного ряда есть промежуток [–1, 1).

Контрольная работа № 8
Теория вероятности и математическая статистика

Задание 1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. По мишени стреляют до первого попадания, после чего стрельбу прекращают. Найти вероятность того, что сбудет сделано не более трех выстрелов.

Решение. Событие A, состоящее в том, что будет сделано не более трех выстрелов, может реализоваться одним из следующих способов: попадание при первом же выстреле; промах при первом выстреле и попадание при втором; промахи при двух первых выстрелах и попадание при третьем. Пусть A_i – событие, состоящее в попадании в мишень при i-ом выстреле, $\overline{A}_i$ – промах при i-ом выстреле. Событие A можно представить в виде суммы несовместных событий следующим образом:

$$A = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3.$$

Применяя теоремы сложения и умножения вероятностей, находим:

$$P(A) = P\left(A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3\right) = P(A_1) + P\left(\overline{A}_1 A_2\right) + P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3\right) =$$
$$= P(A_1) + P\left(\overline{A}_1\right) P(A_2) + P\left(\overline{A}_1\right) P\left(\overline{A}_2\right) P(A_3) =$$
$$= 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}936.$$

Задание 2. Имеется четыре кубика с цифрами по гранях 1, 2, …, 6 и одна правильная пирамида с цифрами на гранях 1, 2, 3, 4. Наугад выбрали предмет и бросили. Выпала цифра 4. Какова вероятность того, что бросали кубик?

Решение. Введем гипотезы: H_1 = {бросали кубик}, H_2 = {бросали пирамиду}. Условную вероятность гипотезы H_1 по отношению к произошедшему событию A = {выпала цифра 4} найдем, используя формулы Бейеса,

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) P(A | H_i)}{P(A)}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum P(H_k) P(A | H_k)$$

находим

$$P(A) = P(H_1) P(A | H_1) + P(H_2) P(A | H_2) =$$
$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{60}.$$

Окончательно имеем:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) P(A | H_1)}{P(A)} = \frac{4/5 \cdot 1/6}{11/60} = \frac{8}{11}.$$

Задание 3. В аппаратуре, содержащей 300 транзисторов, применяются транзисторы с вероятностью годности 0,8. Найти вероятность того, что 400 транзисторов достаточно для того, чтобы полностью укомплектовать аппаратуру.

Решение. Для того чтобы полностью укомплектовать аппаратуру, необходимо, чтобы среди 400 транзисторов число годных было не менее 300. Вероятность этого события находим, используя интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Поскольку $n = 400$, $p = 0{,}8$; $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $m_1 = 300$; $m_2 = 400$;

$$P_{400}(300,\ 400) = \Phi\left(\frac{400 - 400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \Phi(10) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(10) + \Phi(2{,}5).$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение 1) находим: $\Phi(10) \approx 0{,}5$, $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$.

Таким образом, искомая вероятность

$$P_{400}(300,\ 400) \approx 0{,}5 + 0{,}4938 \approx 0{,}994.$$

Задание 4. Время ожидания у автозаправочной станции является случайной величиной X, распределенной по показательному закону со средним временем ожидания t_0. Найти вероятность того, что время ожидания будет длиться от $0{,}5t_0$ до $1{,}5t_0$.

Решение. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(a,\ b)$, может быть определена по формуле $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$, где $F(b)$ и $F(a)$ – значения функции распределения $F(x)$ в конечных точках интервала. Для случайной величины, подчиняющейся показательному закону распределения,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Здесь $1/\lambda = M(x)$ – математическое ожидание случайной величины.

По условию $M(x) = t_0$, следовательно,

$$P(0{,}5t_0 < X < 1{,}5t_0) = 1 - e^{-\frac{1{,}5t_0}{t_0}} - \left(1 - e^{-\frac{0{,}5t_0}{t_0}}\right) = e^{-0{,}5} - e^{-1{,}5} \approx 0{,}3834.$$

Задание 5. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана выражением

$$P(x) = \begin{cases} c \quad \cos x \quad \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0 \quad \text{при } x < 0,\ x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти коэффициент c, математическое ожидание и дисперсию величины X, построить ее функцию распределения. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Коэффициент c находим, используя условие нормировки для $p(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} c\cos x dx = c\sin x\Big|_0^{\pi/2} = c.$$

Следовательно, $c = 1$.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

Используя метод интегрирования по частям, находим:

$$M(X) = \int_{0}^{\pi/2} x\cos x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется следующим образом:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx - M^2(X).$$

Для рассматриваемой случайной величины

$$D(X) = \int_{0}^{\pi/2} x^2 \cos x\, dx - M^2(X) = \pi - 3.$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(t)dt.$$

Для рассматриваемой величины

$$F(x)=0 \quad \text{при } x \le 0,$$

$$F(x)=1 \quad \text{при } x > \pi/2,$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)dt=\int_{0}^{x}\cos t\,dt=\sin x \quad \text{при } 0 < x \le \pi/2.$$

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $(a,\ b)$ можно найти по формуле

$$P(a < X < b)=\int_{a}^{b} p(x)dx.$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{2}\right)=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos x\,dx=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задание 6. Рост взрослых мужчин является случайной величиной *X*, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $M(X)$ = 175 см и средним квадратичным отклонением 5 см. Определить вероятность того, что хотя бы двое из наугад выбранных пяти мужчин будут иметь рост от 170 до 180 см.

Решение. Функция распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону, имеет следующий вид:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right),$$

где $m = M(X)$ – математическое ожидание случайной величины, σ – среднее квадратическое отклонение.

Вероятность того, что случайно выбранный человек будет иметь рост в заданном интервале, равна:

$$P(170 < X < 180)=F(180)-F(170)=\Phi\left(\frac{180-175}{5}\right)-\Phi\left(\frac{170-175}{5}\right)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1).$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение 1) находим $\Phi(1) = 0{,}3413$. Следовательно, $p = P(170 < X < 180) = 2\cdot 0{,}3413=0{,}6826$.

Вероятность того, что при пяти испытаниях событие ($170 < X < 180$) произойдет хотя бы два раза, найдем, используя формулу Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p = 0{,}3174$.

Имеем

$$P_5(2 \le m \le 5) = \sum_{m=2}^{5} P_5(m) = 1 - \sum_{m=0}^{1} P_5(m) = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] =$$

$$= 1 - C_5^0 p^0 q^5 - C_5^1 p^1 q^4 = 1 - q^5 - 5pq^4 = 1 - q^4(q + 5p) =$$

$$= 1 - (0{,}3174)^4(0{,}3174 + 5 \cdot 0{,}6826) = 0{,}9621.$$

Задание 7. Отдел технического контроля проверил $n = 200$ партий одинаковых изделий и получил следующее эмпирическое распределение (в первой строке указано количество x_i нестандартных изделий в одной партии, во второй строке – частота n_i, т.е. количество партий, содержащих x_i нестандартных изделий):

X	0	1	2	3	4
n	116	56	22	4	2

Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о том, что число нестандартных изделий X распределено по закону Пуассона.

Решение. Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i m_i = \frac{0 \cdot 116 + 1 \cdot 56 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{200} = 0{,}6.$$

Примем в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю: $\lambda = 0{,}6$. Следовательно, предполагаемый закон Пуассона

$$P_n(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

имеет вид

$$P_{200}(i) = \frac{(0{,}6)^i}{i!} e^{-0{,}6}.$$

Полагая $I = 0, 1, 2, 3, 4$, найдем вероятности P_i появления i нестандартных изделий в 200 партиях:

$$P_0 = P_{200}(0) = 0{,}5488; \quad P_1 = P_{200}(1) = 0{,}3293; \quad P_2 = P_{200}(2) = 0{,}0988;$$

$$P_3 = P_{200}(3) = 0{,}0198; \quad P_4 = P_{200}(4) = 0{,}0030.$$

Найдем теоретические частоты по формуле

$$n_i' = nP_i = 200P_i.$$

Имеем $n_0^{/} = 200 \cdot 0{,}5488 = 109{,}76$; $n_1^{/} = 65{,}86$; $n_2^{/} = 19{,}76$; $n_3^{/} = 3{,}96$; $n_4^{/} = 0{,}60$. Малочисленные частоты ($n_i < 5$) следует объединить: 4 + 2 = 6. Следует объединить и соответствующие им теоретические частоты: 3,96 + 0,60 = 4,56. Результаты объединения частот запишем в таблицу.

i	n_i	$n_i^{/}$	$n_i - n_i^{/}$	$\left(n_i - n_i^{/}\right)^2$	$\left(n_i - n_i^{/}\right)^2 / n_i^{/}$
0	116	109,76	6,24	38,9376	0,3548
1	56	65,86	–9,86	97,2196	1,4762
2	22	19,76	2,24	5,0176	0,2539
3	6	4,56	1,44	2,0736	0,4547

По расчетной таблице находим наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{\left(n_i - n_i^{/}\right)^2}{n_i^{/}} = 2{,}54.$$

По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 2), по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 4 - 2 = 2$, находим критическую точку правосторонней критической области (см. приложение 2): $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\, 2) \approx 6{,}0$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о распределении случайной величины *X* по закону Пуассона.

Контрольная работа № 5

Функции нескольких переменных

Задание 1. Найти полный дифференциал и частные производные 1-го порядка функции двух переменных

1. $z = x^3 \ln\left(x^2 - 2y\right) + y^2;$
2. $z = x\sqrt{x^2 + y^2} + 2x - y;$
3. $z = x\,\mathrm{tg}\left(y^2 - x\right) + y^3;$
4. $z = x^3 \sin\left(2x + 3y\right) - xy^2;$
5. $z = x^3 e^{x-2y} + x^2 y - 3y^2;$
6. $z = x\,\mathrm{arctg}\left(x^2 y^3\right) - y^2;$
7. $z = xy^x - x^2 + 2y;$
8. $z = x\sin^2\left(2x + 3y\right) - xy;$
9. $z = x\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x^2 y;$
10. $z = x2^{\sin(x-y)} - x^4 y;$
11. $z = y^2 \ln\left(x^3 + y^2\right) - x + 2y;$
12. $z = y\sqrt{x^2 + 2y} - x^4 + 2y^2;$
13. $z = y^2\,\mathrm{tg}\left(x - y\right) + x^3 - 2;$
14. $z = x^2 \cos\left(3x - 2y\right) + xy^2;$
15. $z = y^2 e^{3x-y} - x^3 y + y;$
16. $z = y^2\,\mathrm{arctg}\left(x^3 y^2\right) + 2x;$
17. $z = y^2 x^y + 2x - y^2;$
18. $z = y^2 \cos^2\left(x - y\right) + x^2 y;$
19. $z = y\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) - x^3 y;$
20. $z = y^2 e^{\cos(x-2y)} + xy.$

Задание 2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + by^2 - bz^2 - a^2 = 0$$

в точке $M(a,\ 1,\ 1)$.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	1	2	3	4	5	1	2	3	4	–1	–2	–3	–4	1	2	3	4	5	1	3
b	5	4	3	2	1	2	3	4	1	1	2	3	4	5	–1	–2	–3	–4	2	1

Задание 3. Найти величину и направление градиента скалярного поля

$$u = xyz - x^m y - x^2 z - y^2 z$$

в точке $A(a_1, a_2, a_3)$ и вычислить производную поля u по направлению радиус-вектора точки A

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
a_1	1	1	2	3	3	4	4	1	1	–1	–1	–2	–2	–3	–4	1	2	3	–2	–3
a_2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	1	1	1	1
a_3	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	–1	–1	–1	–1	–2	–2	–3	–3	–1

Задание 4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = ax^3 + xy^2 + bx^2 + y^2 + 1.$$

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	1	1	–3	2	0	0	2	–1	–1	–2	2	–3	3	1	3	–2	4	–2	6	–6
b	2	6	0	5	2	8	3	3	11	5	11	8	9	14	17	15	6	–3	9	–9

Контрольная работа № 6
Кратные и криволинейные интегралы

Задание 1. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \left(x^n + xy + ay\right)dxdy$$

по области D, ограниченной линиями

$$y = bx - x^2, \qquad y = k\left(x - b\right).$$

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	2	3	4	1	2	3	4	0	1	2	–3	–4	3	1	2	3	4	1	–3	–4
a	3	2	1	4	5	6	0	3	2	–4	–1	–2	–3	–5	1	2	3	4	5	–2
k	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5	6	1	2	3	4	3	2	1	5
b	2	3	4	5	6	7	8	3	5	2	4	5	6	3	4	5	6	3	2	4

Задание 2. Вычислить массу тела, если задана плотность

$$g\left(x, y, z\right) = c + z\sqrt{x^2 + y^2}$$

и тело ограничено поверхностями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = bz.$$

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
c	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	–1	–2	–3	–4	–5	1	2	3	4	2
a	1	1	2	2	3	3	4	4	1	2	3	4	3	2	1	5	4	3	2	1
b	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	1	2	2	3	3	4	4	2	3	2

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\oint_L \left(ax - y + bxy\right)dL$$

по замкнутому контуру L, образованному сторонами треугольника ABC с вершинами $A(0, 0)$, $B(0, b)$, $C(a, c)$.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b	2	3	4	5	6	4	3	2	5	6	2	3	4	5	6	4	6	2	3	5
a	1	2	3	4	5	6	7	6	5	4	3	2	3	4	7	5	3	2	4	6
c	2	3	4	5	3	2	4	3	2	–1	–2	–3	–4	–1	–4	–3	2	–4	–3	–1

Задание 4. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = (ax - y)\mathbf{i} + (x + by)\mathbf{j}$ при обходе точки ее приложения по границе L области D из задания 1 в положительном направлении, начиная от точки $A(b, 0)$. Значения параметров a и b взять из соответствующего варианта задания 1.

Задание 5. Найти площадь поверхности цилиндра

$$2z = x^2,$$

отсеченной плоскостями

$$y = ax, \qquad y = bx, \qquad x = c.$$

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	4	3	8	1	2	1	3	4	6	5	1	3	2	1	2	6	5	2	3	2
b	2	2	1	3	3	4	1	1	1	4	4	6	5	2	1	2	3	4	4	6
c	4	3	4	5	6	2	1	2	3	4	2	1	3	4	2	3	5	5	2	3

Контрольная работа № 7
Дифференциальные уравнения и ряды

Задание 1. Проинтегрировать дифференциальные уравнения.

1. $y' = e^y \sin x$;
2. $xy' = y + 1$;
3. $y' \sin x = y$;
4. $xyy' = 1 - x^2$;
5. $y^2 y' = 1 - 2x$;
6. $y' \mathrm{tg} x - y = 0$;
7. $y' = e^y \sin x$;
8. $y' = e^y \cos x$;
9. $(x+1)y' = y - 1$;
10. $(1 - x^2)y' = 2xy$;
11. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2)dy = 0$;
12. $dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$;
13. $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$;
14. $(1 - x)dy - ydx = 0$;
15. $(x - 2x^3)dx + (y + 2y^3)dy = 0$;
16. $\sqrt{x}\,dy = \sqrt{y}\,dx$;
17. $(y^2 + xy^2)dx + (x^2 - yx^2)dy = 0$;
18. $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$;
19. $2x\sqrt{1 - y^2}\,dx + ydy = 0$;
20. $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

Задание 2. Проинтегрировать уравнения

1. $2xy' = x + 3y$;
2. $-xy' = x + 2y$;
3. $xy' = 2x + y$;
4. $(x - 2y)y' = x - y$;
5. $(x + y)y' = y$;
11. $y' = e^{y/x} + y/x$;
12. $2(x + y)dx + (3x + 3y - 1)dy = 0$;
13. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$;
14. $(2x - 2y - 1)dx + (x - y + 1)dy = 0$;
15. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$;

6. $(y-2)y' = x-1$;

7. $xdy - ydx = ydy$;

8. $(y-x)dx - (y+x)dy$;

9. $(x+2y)dx - xdy = 0$;

10. $y' = x/y + y/x$;

16. $(x-y)dx + (2y-x+1)dy = 0$;

17. $xyy' = y^2 + x^2y'$;

18. $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$;

19. $(3y-7x+7)dx - (3x-7y-3)dy = 0$;

20. $(3x+2)dx + (x-1)dy = 0$.

Задание 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y' + 2y = 4x$;

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

3. $y' + y = \cos x$;

4. $x^2y' + (1-2x)y = x^2$;

5. $y' + y = 2e^x$;

6. $y' - y/x = -x$;

7. $xy' + y = y^2 \ln x$;

8. $y' + y = x+1$;

9. $y' + y/x = 2x$;

10. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;

11. $y' + y/x = 3x$;

12. $y' + 3xy = 2x^3y^3$;

13. $(x+1)y' + y + (x+1)y^2 = 0$;

14. $y' - y = xy^2$;

15. $y' - 2y/x = x$;

16. $y' - xy = x^3y^3$;

17. $2yy' + y^2 = x$;

18. $y' + y = \sin x$;

19. $xy' + y + x^2y^2 = 0$;

20. $(x+1)y' + y = (x+1)x^2$;

Задание 4. Проинтегрировать дифференциальные уравнения

1. $y''' = x + \sin x$;
2. $y'' = \ln x$;
3. $y''' = 2/x^3$;
4. $y'' = \sin^2 x$;
5. $y'' = \mathrm{arctg} x$;
6. $y' - y/x = -x$;
7. $xy'' = y' + x^2$;
8. $(y'')^2 = y'$;
9. $y' = e^{2y}$;
10. $(y'')^2 + 2yy' = 0$;
11. $4\sqrt{y}y'' = 1$;
12. $yy'' = (y')^2$;
13. $x(y'' - x) = y'$;
14. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;
15. $y'(1 + (y')^2) = y''$;
16. $2y'' = 3y^2$;
17. $y^3y'' = -1$;
18. $2y''' - 3(y'')^2 = 0$;
19. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$;
20. $3y'y'' = 2y$.

Задание 5. Найти общее решение дифференциального уравнения и его частное решение $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1. $y'' - y = x^2 - x + 1$;
2. $y'' + 5y' + 6y = 3$;
3. $y'' + y' = 4e^x$;
4. $y'' - y' - 3y = -4e^x + 3$;
5. $y'' - y' + y = -13\sin 2x$;
6. $y'' - 2y' + 2y = 2x$;
7. $2y'' + 5y' = \cos x$;
8. $5y'' - 6y' + 5y = \sin 0{,}8x$;
11. $y'' - 4y' = -12x^2 + 4x$;
12. $y'' + y' = 3$;
13. $y'' - 2y' + y = 4e^x$;
14. $y'' + y = 6\sin 2x$;
15. $2y'' + y' - y = 2e^x$;
16. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$;
17. $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$;
18. $y'' - 2y' - 3y = -4e^x$;

9. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$;

10. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$;

19. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$;

20. $y'' - 4y' + 4y = \sin x - 2e^{-x}$.

Задание 6. Методом исключения проинтегрировать системы уравнений.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$;

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$;

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$;

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$;

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$;

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases}$;

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$;

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$;

10. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -4y + 4z \end{cases}$;

11. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 2z \end{cases}$;

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 4y \end{cases}$;

13. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -6y - 3z \end{cases}$;

14. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 6y - 5z \end{cases}$;

15. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -10y - z \end{cases}$;

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}$;

17. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y - 2z \end{cases}$;

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$;

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$;

20. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 2z \end{cases}$.

Задание 7. Исследовать сходимость ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{e^n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^2+n}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)^n}{(3n+1)^n}$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{4^n}$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2}$;
15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$;
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{2^n}$;
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)n}$;
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)2^n}$;
19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n}\right)^n$;
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$.

Задание 8. Найти область сходимости степенного ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{2^n n}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2n+1}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\, x^n}{2^n}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2+1}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)3^n}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^3+n}$;
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{n!}$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^3 x^n}{2^n-1}$;
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n^2+n}$;
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^3}$;
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x^n}{2^n(n+1)}$;
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2n+1}$;
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\, 2^{n-1}}$;
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!\, x^n}{2n+1}$;
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n x^n}{n!}$;
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n x^n}{2^n}$;
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{n!}$;
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$;
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n x^n}{n!}$;
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n n}{3^n}$.

Контрольная работа № 8

Теория вероятности и математическая статистика

Задание 1. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего первый станок – p_1, второй – p_2, третий – p_3. Найти вероятность того, что в течение часа:

а) хотя бы один станок потребует внимания рабочего;

б) потребуют внимания рабочего 2 станка.

Вар.	p_1	p_2	p_3
1	0,8	0,7	0,5
2	0,4	0,5	0,7
3	0,3	0,9	0,9
4	0,4	0,4	0,8
5	0,6	0,8	0,4
6	0,5	0,3	0,3
7	0,8	0,1	0,2
8	0,4	0,8	0,7
9	0,2	0,8	0,3
10	0,2	0,9	0,7

Вар.	p_1	p_2	p_3
11	0,9	0,6	0,3
12	0,7	0,6	0,5
13	0,5	0,6	0,4
14	0,6	0,8	0,5
15	0,9	0,4	0,7
16	0,6	0,2	0,3
17	0,2	0,3	0,4
18	0,3	0,2	0,1
19	0,6	0,3	0,4
20	0,8	0,4	0,6

Задание 2. Для подготовки к соревнованиям были отобраны 4 курсанта первого взвода, 9 курсантов второго взвода и 7 курсантов третьего взвода. Вероятность выиграть соревнования для курсанта первого взвода равна p_1, для курсанта второго взвода – p_2, для курсанта третьего взвода – p_3. Оказалось, что наугад выбранный курсант стал победителем соревнований. Из какого взвода вероятнее всего был этот курсант?

Вар.	p_1	p_2	p_3
1	0,6	0,5	0,8
2	0,6	0,8	0,7
3	0,8	0,9	0,7
4	0,8	0,6	0,7
5	0,9	0,8	0,8
6	0,6	0,5	0,7
7	0,5	0,8	0,7
8	0,7	0,5	0,7
9	0,9	0,6	0,5
10	0,6	0,7	0,9

Вар.	p_1	p_2	p_3
11	0,7	0,6	0,4
12	0,7	0,7	0,6
13	0,9	0,7	0,8
14	0,7	0,8	0,9
15	0,5	0,4	0,8
16	0,7	0,6	0,5
17	0,8	0,9	0,5
18	0,9	0,5	0,6
19	0,6	0,6	0,5
20	0,8	0,7	0,8

Задание 3. Завод выпускает 98% качественных и 2% бракованных изделий. Найти вероятность того, что среди наугад взятых N изделий число бракованных будет меньше k.

Вар.	N	k	**Вар.**	N	k
1	1000	25	**11**	1100	31
2	1200	32	**12**	1300	36
3	1400	36	**13**	1500	40
4	1600	40	**14**	1700	28
5	1800	30	**15**	1900	42
6	2000	48	**16**	2100	48
7	2200	40	**17**	2300	31
8	2400	55	**18**	2500	60
9	2600	44	**19**	2700	64
10	2800	63	**20**	2900	62

Задание 4. Среднее время работы каждого из двух элементов, входящих в пожарно-техническое устройство, равно 1000 часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа каждого элемента. Определить вероятность того, что устройство будет безотказно работать от a до b часов, если время t работы элементов независимо и распределено по показательному закону.

Вар.	***a***	***b***	**Вар.**	***a***	***b***
1	700	800	**11**	750	900
2	620	740	**12**	650	950
3	800	900	**13**	850	920
4	880	940	**14**	900	950
5	900	980	**15**	900	1000
6	700	1100	**16**	750	1000
7	800	1200	**17**	850	1250
8	900	1100	**18**	950	1150
9	1050	1200	**19**	1100	1300
10	1150	1250	**20**	1000	1300

Задание 5. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением

$$p(x) = \begin{cases} c\left(2x + x^2\right) & \text{при } 0 \le x \le 4, \\ 0 & \text{при } x < 0,\ x > 4 \end{cases}$$

Найти:

а) коэффициент c;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность попадания величины X вне интервала (a, b);

д) построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

Вар.	***a***	***b***
1	0	1
2	1	2
3	0	2
4	1	4
5	1,5	3
6	2	2,5
7	2,5	3,5
8	1	2,5
9	0	1,5
10	2	3,5

Вар.	***a***	***b***
11	0,5	1,5
12	1	3
13	0	3
14	1,5	2,5
15	0,5	3
16	3	3,5
17	3,5	4
18	2,5	3
19	0	2,5
20	2	4

Задание 6. Производится стрельба тремя снарядами по мосту шириной 20 м. При попадании одного снаряда мост разрушается с вероятностью p_1, при попадании двух снарядов – с вероятностью p_2, при попадании трех снарядов мост будет разрушен. Считая, что отклонение X точки попадания снаряда от средней линии моста подчиняется нормальному закону с $m = 0$ и средним квадратичным отклонением $s = 16$ м, найти вероятность разрушения моста.

Вар.	p_1	p_2
1	0,4	0,6
2	0,6	0,9
3	0,5	0,9
4	0,3	0,9
5	0,6	0,8
6	0,3	0,8
7	0,7	0,9
8	0,2	0,8
9	0,2	0,4
10	0,3	0,5

Вар.	p_1	p_2
11	0,5	0,8
12	0,4	0,7
13	0,3	0,7
14	0,4	0,8
15	0,4	0,6
16	0,5	0,7
17	0,2	0,6
18	0,4	0,9
19	0,5	0,6
20	0,2	0,7

Задание 7. Случайная величина X – число пожаров, произошедших за одни сутки в городе. Данные за год приведены в таблице вариантов(n – число суток, в которые произошли k пожаров).

Для случайной величины X:

а) найти статистический ряд распределения;

б) построить полигон относительных частот;

в) найти оценки математического ожидания и дисперсии;

г) найти среднее число пожаров, происходящих за одни сутки;

д) в предположении, что X имеет распределение Пуассона, определить вероятность возникновения более одного пожара в течении недели;

е) проверить с помощью c^2-критерия статистическую гипотезу о пуассоновском распределении величины X при уровне значимости a = 0,1;

ж) построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$.

1	***X***	0	1	2	3	5	7
	n	58	120	80	60	30	17

2	***X***	0	1	2	3	5	7
	n	92	160	110	1	1	1

3	***X***	0	1	2	3	5	7
	n	110	112	76	36	30	1

4	***X***	0	1	2	4	5	6
	n	200	52	76	10	10	7

5	***X***	0	1	2	3	6	9
	n	125	116	48	20	25	30

6	***X***	0	1	2	3	4	6
	N	165	115	36	19	21	9

7	***X***	0	1	2	3	4	7
	n	180	90	30	20	25	20

8	***X***	0	1	2	3	5	6
	n	158	58	42	27	50	30

11	***X***	0	1	2	3	4	5
	n	100	96	90	28	26	25

12	***X***	0	1	3	5	6	7
	n	132	106	27	33	34	33

13	***X***	0	1	2	3	5	7
	n	220	46	42	17	22	18

14	***X***	0	1	2	3	6	8
	n	242	24	19	25	35	20

15	***X***	0	1	2	3	5	6
	n	132	115	23	45	30	20

16	***X***	0	1	2	4	5	8
	n	230	100	15	6	8	6

17	***X***	0	1	2	3	5	6
	n	180	92	28	25	24	16

18	***X***	0	1	3	4	7	8
	n	255	82	8	6	6	8

9

X	0	1	2	3	5	7
n	165	100	35	21	28	15

19

X	0	1	2	3	4	5
n	230	75	28	17	9	6

10

X	0	1	2	3	4	6
n	192	88	33	13	27	13

20

X	0	1	2	3	4	7
n	185	130	32	9	6	3

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,60	0,2257	2,10	0,4821	3,60	0,4998
0,01	0,0040	0,70	0,2580	2,20	0,4861	3,70	0,4999
0,02	0,0080	0,80	0,2881	2,30	0,4893	3,80	0,4999
0,03	0,0120	0,90	0,3159	2,40	0,4918	3,90	0,5000
0,04	0,0160	1,00	0,3413	2,50	0,4938	4,00	0,499968
0,05	0,0199	1,10	0,3643	2,60	0,4953	4,10	0,499979
0,06	0,0239	1,20	0,3849	2,70	0,4965	4,20	0,499987
0,07	0,0279	1,30	0,4032	2,80	0,4974	4,30	0,499991
0,08	0,0319	1,40	0,4192	2,90	0,4981	4,40	0,499995
0,09	0,0359	1,50	0,4332	3,00	0,4987	4,50	0,499997
0,10	0,0398	1,60	0,4452	3,10	0,4990	4,60	0,499998
0,20	0,0793	1,70	0,4554	3,20	0,4993	4,70	0,499999
0,30	0,1179	1,80	0,4641	3,30	0,4995	4,80	0,499999
0,40	0,1554	1,90	0,4713	3,40	0,4997	4,90	0,4999995
0,50	0,1915	2,00	0,4772	3,50	0,4998	5,00	0,4999997

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы, k	Уровень значимости a					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63	5,02	3,84	0,00393	0,00098	0,00016
2	9,21	7,38	5,99	0,103	0,051	0,020
3	11,34	9,35	7,81	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,49	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	1,145	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	1,64	1,24	0,87
7	18,48	16,01	14,07	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,53	15,51	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	3,94	3,25	2,56
11	24,73	21,92	19,68	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,68	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	18,49	16,79	14,95

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Гусак А.А. Высшая математика. Т. 1 – 2. – Минск: ”Тетрасистемс”,1998.
2. Дадаян А.А, Дударенко В.А. Математический анализ. – Минск: “Вышэйшая школа”, 1990.
3. Руководство к решению задач по высшей математике (под ред. Гурского Е.И). – Т. 1 – 2. – Минск: “Вышэйшая школа” 1989.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: “Наука”. 1980, 1981, 1988, 1989.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – Москва: “Наука”, 1970.
6. Сережкин В.Н., Отчик В.С. Высшая математика. Курс лекций. Часть 3. Функции нескольких переменных. Кратные интегралы. Ряды. Дифференциальные уравнения. – Минск: УП “ЦНИИТУ”, 2007.

Дополнительная литература

7. Гусак А.А Задачи и упражнения по высшей математике. Т. 1 – 2. – Минск: ”Вышэйшая школа”, 1986.
8. Сережкин В.Н., Терешенков В.И. Элементы теории вероятности и математической статистики. Учебно-методическое пособие. Минск: ВПТУ, 1997.

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
для слушателей 2 курса факультета заочного обучения

Авторы-составители:
Гончаренко Игорь Андреевич
Отчик Владимир Сергеевич**,**
Сережкин Валентин Николаевич
Терешенков Владимир Иванович

Ответственный за выпуск А.В.Сорокин
Редактор
Компьютерная верстка
Корректор

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Отпечатано на ризографе. Усл.печ.л. .
Уч.-изд.л. .Тираж экз. Заказ № .

Государственное учреждение образования
«Командно-инженерный институт»
МЧС Республики Беларусь. ЛИ № 02330/0133406 от 14.12.2004 г.
220118 г. Минск, ул. Машиностроителей, 25.
Тел./факс: (017)2403557

Отпечатано с оригинал-макета заказчика в типографии УП ”ЦНИИТУ”.
ЛП № 02330/0056675 от 29.03. 2004 г.
220033, Минск, пр. Партизанский, 2, корп. 4