МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионельного образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для заочников

В двух книгах

Книга 1

КИНЕМАТИКА.

СТАТИКА

ПЕНЗА 2012

УДК 531. 07

Т33

Р е ц е н з е н т ы:

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Строительная и теоретическая механика»
Пензенского государственного университета архитектуры и строительства»
А.И. Шеин

доктор технических наук,
профессор кафедры «Основы конструирования механизмов и машин»
Пензенской государственной сельскохозяйственной академии
В. А. Мачнев

Авторы:

В. В.Смогунов, О. А. Вдовикина,

Н. Ю. Митрохина, А. В. Кузьмин

Теоретическая механика : учеб. пособие для заочников : в 2 кн. / под общ. ред. Смогунова В.В. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. – Кн. 1. Кинематика. Статика. – 66 с.

Представлены теоретические материалы, контрольные задания и примеры решения задач по разделам «Кинематика» и «Статика».

Учебное пособие составлено на основе сборников задач С. М. Тарга с учетом опыта преподавания курса «Теоретическая механика» в Пензенском государственном университете согласно Государственным образовательным стандартам. Особое внимание уделено рассмотрению типовых примеров; приведены подробные алгоритмы их решений.

Пособие подготовлено на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» ПГУ и предназначено для студентов машиностроительных, приборостроительных специальностей и специальностей сервиса оборудования.

УДК 531. 07.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Теоретическая механика относится к ряду естественных наук, т.е. наук о природе. Это наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и возникающих при этом взаимодействиях между телами.

В отличие от физики теоретическая механика изучает количественную сторону связи механического движения с механическим взаимодействием, оставляя в стороне их физическую качественную природу.

Теоретическая механика – фундамент развития технических наук. На основных законах и принципах теоретической механики базируется большинство инженерных дисциплин – сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др. (рис. В.1).

Методы исследования, применяемые в теоретической механике, используют при изучении динамических систем, которые описывают явления, выходящие за рамки механических движений.

Разделы «Теоретической механики»

В теоретической механике можно выделить три раздела:

– кинематика;

– статика;

– динамика.

Кинематика – раздел «Теоретической механики», в котором изучается движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, без учета сил, вызвавших это движение.

Статика – раздел «Теоретической механики», в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Равновесие материальных тел является частным случаем движения.

Динамика – раздел «Теоретической механики», в котором изучается движение тел в пространстве в зависимости от действующих на них сил (движение тел под действием сил).

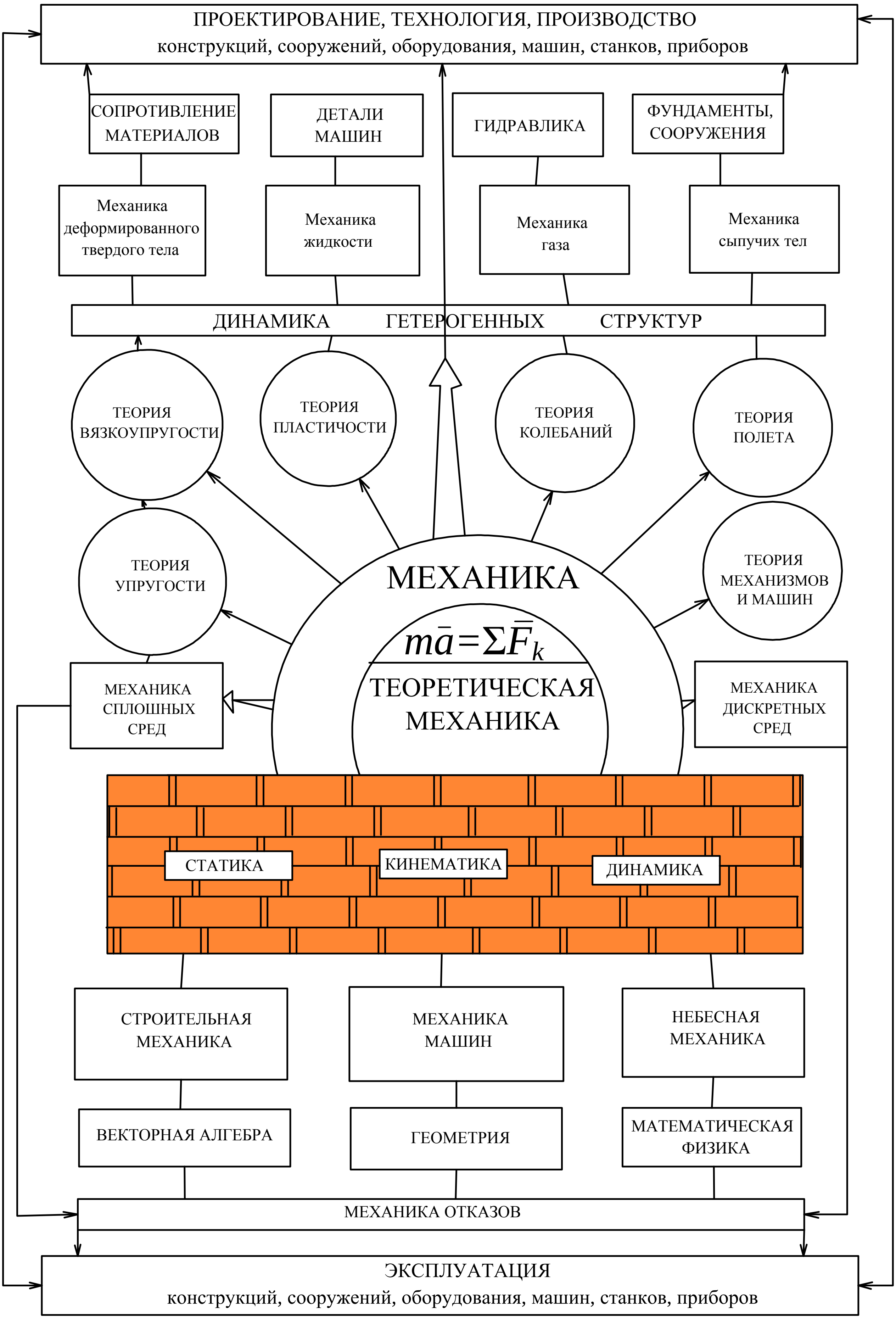

ПРОЕКТИРОВАНИЕ, ТЕХНОЛОГИЯ, ПРОИЗВОДСТВО
конструкций, сооружений, оборудования, машин, станков, приборов
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ДЕТАЛИ МАШИН
ГИДРАВЛИКА
ФУНДАМЕНТЫ, СООРУЖЕНИЯ
Механика деформированного твердого тела
Механика жидкости
Механика газа
Механика сыпучих тел
ДИНАМИКА ГЕТЕРОГЕННЫХ СТРУКТУР
ТЕОРИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ
ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧОСТИ
ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ
ТЕОРИЯ ПОЛЕТА
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
МЕХАНИКА
ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН
$m\bar{a}=\Sigma\bar{F}_k$
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
МЕХАНИКА ДИСКРЕТНЫХ СРЕД
СТАТИКА
КИНЕМАТИКА
ДИНАМИКА
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
МЕХАНИКА МАШИН
НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
ГЕОМЕТРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
МЕХАНИКА ОТКАЗОВ
ЭКСПЛУАТАЦИЯ
конструкций, сооружений, оборудования, машин, станков, приборов

Рис. В.1

Модели теоретической механики

1. Материальная точка – тело, обладающее массой и не обладающее размерами (размерами тела в данных условиях можно пренебречь).

2. Система материальных точек – совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения других точек этой системы.

3. Абсолютно твердое тело – система материальных точек, в которой расстояния между любыми точками не изменяются при воздействии любых сил.

4. Механическая система – совокупность абсолютно твердых тел или абсолютно твердых тел и материальных точек.

5. Деформируемое тело (упругое тело).

ПРОГРАММА КУРСА

Кинематика. Предмет кинематики. Векторный способ задания движения точки. Естественный способ задания движения точки. Понятие об абсолютно твердом теле. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. Общий случай движения свободного твердого тела. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

Статика. Предмет статики. Понятие о силовом поле. Система сил, аналитические условия равновесия произвольной системы сил. Центр тяжести твердого тела и его координаты.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют одно контрольное задание (работу) из 1-й книги учебного пособия.

Задание включает задачи К1 – К4 по кинематике и задачи С1, С2 по статике.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. К1.4 – это рис. 4 к задаче К1 и т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней: например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условие № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи*: на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате, в целом ряде задач, чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно.* Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) *и подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения.

Если тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, l_2, r_2 – тела *2* и т. д. Аналогично, в кинематике и динамике v_B, a_B означают скорость и ускорение точки *B*; v_C, a_C – точки *C*; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела *1*; ω_2, ε_2 – тела *2* и т. д.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту,* т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Кинематика

Предмет кинематики – изучение геометрических свойств движения тел без учета их массы и действующих сил.

Пространство рассматривается как трехмерное евклидово пространство, а время протекает одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета.

Относительность механического движения связана с выбором **системы отсчета** – системы координат для определения положения движущегося тела, связанной с тем телом, по отношению к которому изучается движение. Кроме системы координат система отсчета включает в себя время.

Задачи кинематики: установление математических способов задания движения тел и определение основных кинематических величин: траекторий, скоростей, ускорений и т.п.

Кинематика точки

Векторный способ задания движения точки состоит в задании радиус-вектора точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Траектория точки – геометрическое место концов радиус-вектора.

Скорость точки – первая производная радиус-вектора точки по времени: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Ускорение точки – первая производная скорости точки по времени или вторая производная радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах состоит в задании уравнений движения:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$$

Определение *траектории* точки состоит в исключении времени из уравнения движения и нахождении траектории в виде, дающем зависимость между ее координатами $y = f(x)$.

Определение *скорости* и *ускорения точки* по их проекциям на прямоугольные декартовы координатные оси:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}; \quad v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x},$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}\ , \qquad a = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}.$$

Естественный способ задания движения точки состоит в выдаче:

1) траектории точки;

2) начала отсчета;

3) закона движения точки по траектории $s = f(t)$ (s – дуговая координата).

Естественный трехгранник составляется из соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей с осями – единичными векторами: $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$.

Алгебраическая величина *скорости точки*: $v = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$.

Определение *ускорения точки* по его проекциям на оси естественного трехгранника:

$$a = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_n^{\ 2}},$$

где $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \ddot{s}$ – касательное ускорение точки, характеризующее изменение вектора скорости точки по величине,

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ – нормальное ускорение точки, характеризующее изменение вектора скорости точки по направлению (ρ – радиус кривизны траектории в данной точке).

Кинематика твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором остаются неподвижными все точки тела, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения. При этом все остальные точки тела описывают окружности с центрами на оси вращения.

Уравнение вращательного движения абсолютно твердого тела:

$\varphi = f(t)$ (φ – угловая координата, рад).

Угловая скорость и угловое ускорение абсолютно твердого тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вектор угловой скорости абсолютно твердого тела направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. Вектор углового ускорения при ускоренном движении направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, а при замедленном движении – в противоположном направлении.

Выражение скорости точки вращающегося тела и ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r};\ \vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r};\ \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

В виде алгебраических значений:

$$v = \omega r; \quad a_\tau = \varepsilon r; \quad a_n = \omega v \text{ или } a_n = \omega^2 r.$$

Плоскопараллельное движение абсолютно твердого тела (движение плоской фигуры в ее плоскости) – это такое движение, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Движение плоской фигуры в ее плоскости раскладывается на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Вращательная часть движения от выбора полюса не зависит, отсюда следует независимость угловой скорости и углового ускорения фигуры от выбора полюса.

Уравнения движения плоской фигуры:

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t).$$

Скорость любой точки плоской фигуры определяется как геометрическая сумма скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса:

$$\vec{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA};\ v_{MA} = \omega \cdot MA.$$

Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры: проекции скоростей двух точек абсолютно твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу и одинаково направлены:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta.$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – это точка (P), неизменно связанная с телом, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС основывается на двух свойствах:

1) скорость любой точки тела, лежащей в сечении S, равна скорости при ее вращении вокруг МЦС;

2) скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС, т.е. $v_A = \omega \cdot PA,\ v_B = \omega \cdot PB,\ \dfrac{v_A}{PA} = \dfrac{v_B}{PB}.$

Для определения МЦС надо знать только направления скоростей $\vec{v}_A, \vec{v}_{B,}$, для определения v_B – модуль и направление $\vec{v}_A$ и направление $\vec{v}_B$; угловая скорость тела в каждый момент времени равна отношению скорости какой-нибудь точки к ее расстоянию до МЦС $\omega = \frac{v_B}{PB}$.

Ускорение любой точки плоской фигуры определяется как геометрическая сумма ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса

$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}$,

где $\vec{a}_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$;

$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^{n}$ – при движении полюса по прямой;

$\vec{a}_M = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n} + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^{n}$ – при движении полюса по окружности.

Мгновенный центр ускорений – это точка (Q), ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Ускорения любых других точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений: $\frac{a_M}{QM} = \frac{a_A}{QA} = ... = \frac{a_N}{QN}$.

Сложное движение точки

Абсолютным, или *сложным*, называется движение точки по отношению к неподвижной системе координат, выбранной за основную; движение точки по отношению к подвижной системе координат называется *относительным*; под *переносным* движением понимается движение подвижной системы координат относительно неподвижной. Соответственно называются скорости и ускорения в этих движениях.

<u>Теорема о сложении скоростей</u>: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}, \quad v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{отн}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2v_{\text{отн}}v_{\text{пер}}\cos\alpha}.$$

<u>Теорема Кориолиса о сложении ускорений</u>: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного (характеризующего изменение относительной скорости точки в относительном движении), переносного (характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении) и кориолисова (характеризующего изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении):

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Модуль кориолисова ускорения:

$$a_{\text{кор}} = 2\left|\omega_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}}\right| \cdot \sin\left(\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}\right).$$

Направление кориолисова ускорения находится поворотом вектора относительной скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ на 90° в сторону переносного вращения.

В случае поступательного переносного движения кориолисово ускорение обращается в нуль.

Сложное движение твердого тела

Сложение поступательных движений: результирующее движение также является поступательным со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Сложение мгновенных вращений абсолютно твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей:

1. Сложение движений вокруг двух осей, пересекающихся в точке *O*: результирующее движение тела можно представить как мгновенное вращение вокруг оси *OC* , проходящей через точку *O*, с угловой скоростью равной геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$;

2. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей:

а) $\omega = \omega_1 + \omega_2$ при вращении в одну сторону;

б) $\omega = \omega_1 - \omega_2$ при вращении в разные стороны ($\omega_1 \neq \omega_2$).

Пара мгновенных вращений ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) эквивалентна поступательному движению со скоростью $v = \omega \cdot AB$ (AB – расстояние между осями).

Кинематический винт – это сложное движение, состоящее из вращательного вокруг оси *AO* и поступательного параллельно оси *AO*.

Контрольные задания и примеры решения

Задача К1а

Точка B движется в плоскости xy (рис. К1.0…К1.9, табл. К1, траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки, для момента времени t_1 = 1с определить скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x=f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$, дана в табл. К1 (для рис. 0–2 в столбце 2, для рис. 3–6 в столбце 3, для рис. 7–9 в столбце 4). Номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 – по последней.

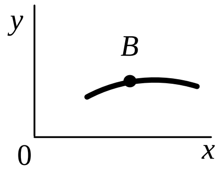
Задача К1б

Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону $s=f(t)$, заданному в табл. К1 в столбце 5 (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\cup}{AM}$ – расстояние точки от некоторого начала A, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1с. Изобразить на рисунке векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении M, а положительное направление отсчета s – от A к M.

Таблица К1

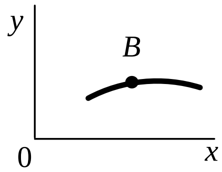
Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0–2	рис. 3–6	рис.7–9	
1	2	3	4	5
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2 + 2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t - 2t^2$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2$	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 - 10t$

1	2	3	4	5
7	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$



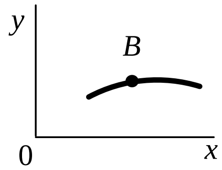
$$x = 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$$

Рис. К1.0



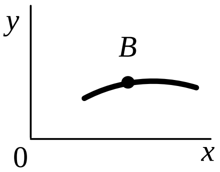
$$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.1



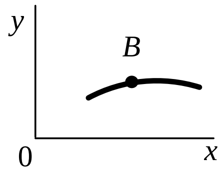
$$x = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.2



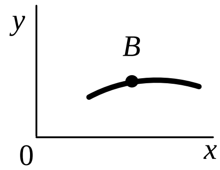
$$x = t - 4$$

Рис. К1.3



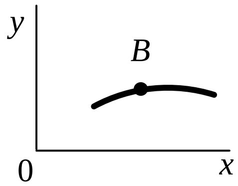
$$x = 4 - 2t$$

Рис. К1.4



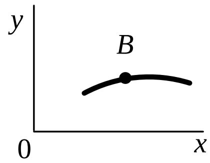
$$x = 2 - t$$

Рис. К1.5



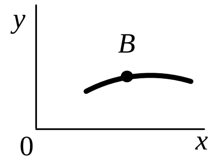
$$x = 2t$$

Рис. К1.6



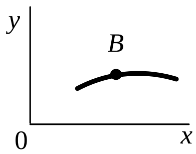
$$x = 8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$$

Рис. К1.7



$$x = 12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.8



$$x = 4 - 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.9

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения. В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1 = 1с.

В некоторых вариантах задачи К1а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot$$

<u>**Пример К1.1 а**</u>. <u>Дано</u>: уравнения движения точки в плоскости *xy*:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3,\ y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(*x, y* – в сантиметрах, *t* – в секундах).

<u>Определить</u>: уравнение траектории точки, для момента времени t_1 = 1 с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время *t*. Поскольку *t* входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \tag{1}$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1.1а):

$$x = (y+1)^2 + 1. \tag{2}$$

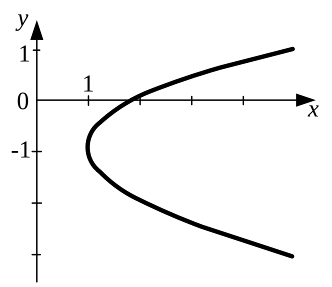


Рис. К1.1а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$v_{1x} = 1{,}11\,\text{см/с},\ v_{1y} = 0{,}73\,\text{см/с},\ v_1 = 1{,}33\,\text{см/с}. \qquad (3)$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right),\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при t_1=1 с

$$a_{1x} = 0{,}87\ \text{см/с}^2;\ a_{1y} = -\,0{,}12\ \text{см/с}^2;\ a_1 = 0{,}88\ \text{см/с}^2. \qquad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Получим

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \qquad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, находим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Ответ: $v_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Пример К1.2 а Дано: уравнения движения точки в плоскости *xy*:

$$x = 4 - 2t;\ y = 2\cos\frac{\pi t}{4} \qquad (1)$$

(*x, y* – в сантиметрах, *t* – в секундах).

Определить: уравнение траектории точки, для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время *t*. Из первого уравнения (1) выразим параметр *t*: $t = \dfrac{4-x}{2}$ и подставим полученное значение во второе уравнение (1):

$$y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{8}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{8}+\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{8}\right).$$

Учтя, что $\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, а $\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, получим окончательно уравнение траектории (синусоиды, рис. К1.2а)

$$y = 2\sin\frac{\pi x}{8}.$$

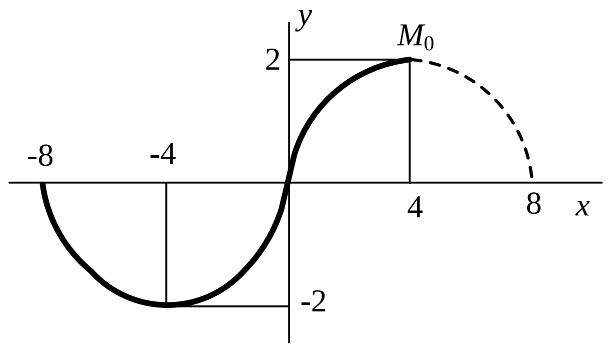


Рис. К1.2а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \dot{x} = -2;\; v_y = \dot{y} = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{4};\; v = \sqrt{v_x^2+v_y^2};$$

и при t_1 = 1 с

$$v_{1x} = -2\,\text{см/с},\quad v_{1y} = -1{,}11\,\text{см/с},\; v_1 = 2{,}29\,\text{см/с}. \tag{3}$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \dot{v}_x = 0,\quad a_y = \dot{v}_y = -\frac{\pi^2}{8}\cos\frac{\pi t}{4};\quad a = \sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

и при t_1=1 с

$$a_{1x} = 0;\; a_{1y} = -0{,}87\ \text{см/с}^2;\; a_1 = 0{,}87\ \text{см/с}^2. \tag{4}$$

4. Касательное ускорение найдем по формуле

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \tag{5}$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, находим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0{,}42$ см/с.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}76$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2 / a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n} , найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 6{,}9$ см.

Ответ: $v_1 = 2{,}29$ см/с, $a_1 = 0{,}87$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}42$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}76$ см/с^2, $\rho_1 = 6{,}9$ см.

<u>Пример К1.1 б</u>. При движении точки по дуге окружности радиуса $R = 2$ м уравнение пути имеет вид: $s = 6t - 2t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\cup}{AM}$ (рис. К1 б).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1=1 с.

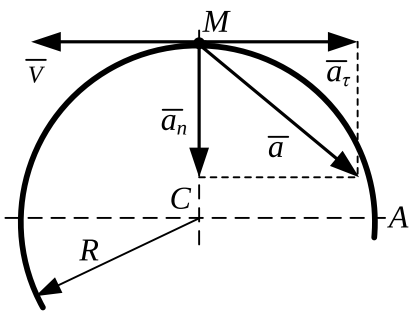


Рис. К1.1 б

Решение. Движение точки задано естественным способом. Скорость точки определим как первую производную от дуговой координаты по времени: $v = \dfrac{ds}{dt} = 6 - 4t$. При t_1=1 с получим $v_1 = 6 - 4 \cdot 1 = 2$ м/с .

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим: $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = -4$ м/с, $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

При t_1=1 с получим: $a_{1\tau} = -4$ м/с^2 , $a_{1n} = 2^2/2 = 2$ м/с^2 .

Тогда ускорение точки при t_1=1 с будет

$$a = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 4{,}47 \text{ м/с}^2 .$$

Изобразить векторы $\bar{v}_1$ и $\bar{a}_\tau$ следует, учитывая знаки результатов дифференцирования $(v_1 > 0,\ a_{1\tau} < 0)$, при этом направление касательной считать положительным в сторону возрастания дуговой координаты. Вектор $\bar{a}_n$ направлен к центру окружности.

<u>Пример К1.2 б.</u> При движении точки по дуге окружности радиуса $R = 2$ м уравнение пути имеет вид: $s = 4\cos\dfrac{\pi t}{3}$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\cup}{AM}$ (рис. К1 б).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1=1 с.

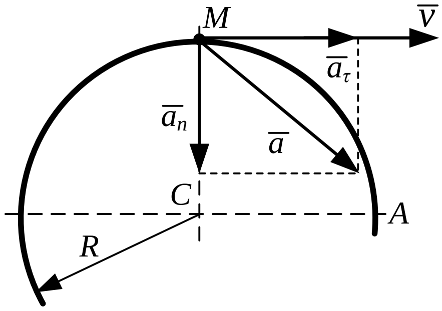


Рис. К1.2.б

Решение. Движение точки задано естественным способом. Скорость точки определим как первую производную от дуговой координаты по времени: $v = \dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{4\pi}{3}\sin\dfrac{\pi t}{3}$. При t_1=1 с получим $v_1 = -3{,}65 см/с$.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим: $a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{4\pi^2}{9}\cos\dfrac{\pi t}{3}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{R}$.

При t_1=1 с получим: $a_{1\tau} = -2{,}19\, см/с^2$, $a_{1n} = 6{,}66\, см/с^2$.

Тогда ускорение точки при t_1=1 с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = 7{,}02\, см/с^2.$$

Изобразить векторы $\bar{v}_1$ и $\bar{a}_\tau$ следует, учитывая знаки результатов дифференцирования $(v_1 < 0,\ a_{1\tau} < 0)$, при этом направление касательной считать положительным в сторону возрастания дуговой координаты. Вектор $\bar{a}_n$ направлен к центру окружности.

Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колёс *1…3*, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0…К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса *1* – r_1 = 2 см, R_1 = 4 см, у колеса *2* – r_2 = 6 см, R_2 = 8 см, у колеса *3* – r_3 = 12 см, R_3 = 16 см. На ободьях колес расположены точки *A, B* и *C*.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса *1*, $S_4(t)$ – закон движения рейки *4*, $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса *2*, $v_5(t)$ – закон изменения скорости груза *5* и т.д. (везде φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и v_4, v_5 – вниз.

Определить в момент времени t_1 = 2с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (v – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (v_5 – скорость груза *5* и т.д.).

Указания. Задача К2 – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A, v_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\dot{\varphi}_2 = 2(t^2 - 3t)$	v_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4

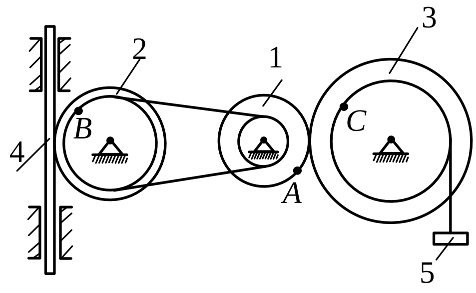


Рис. К2.0

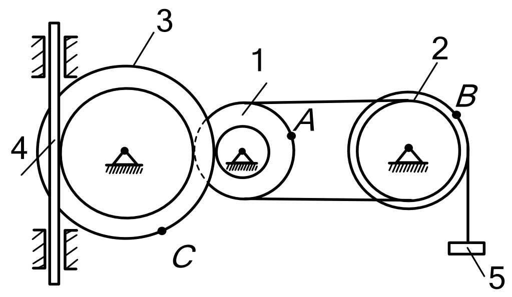


Рис. К2.1

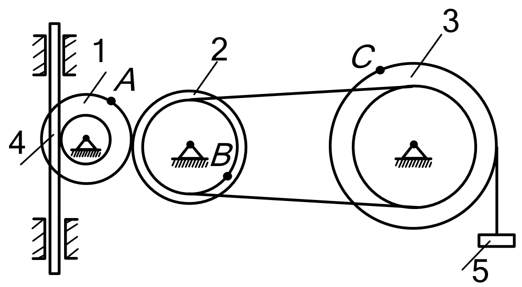


Рис. К2.2

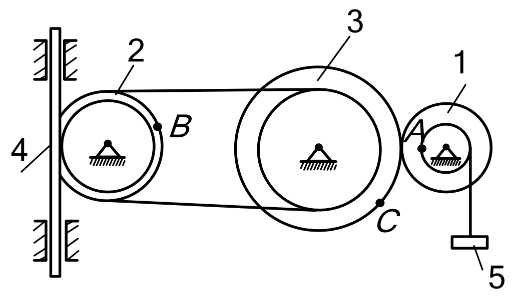


Рис. К2.3

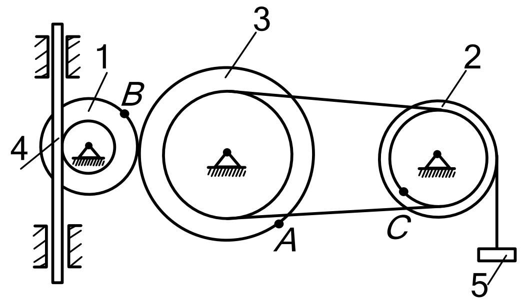


Рис. К2.4

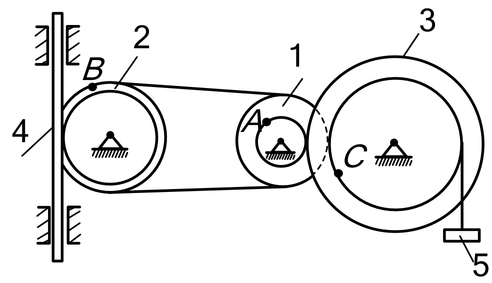


Рис. К2.5

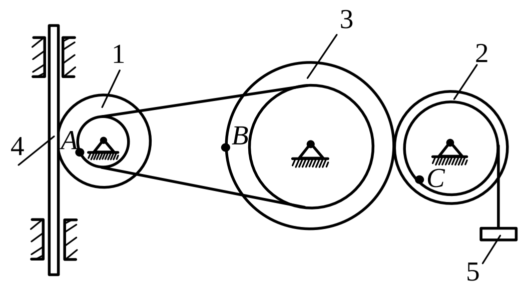


Рис. К2.6

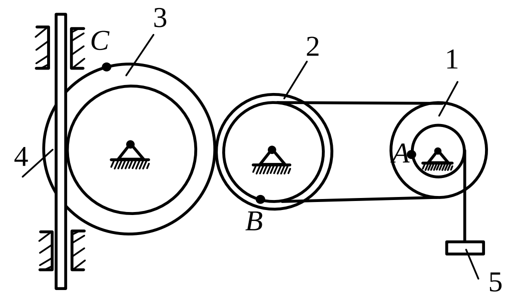


Рис. К2.7

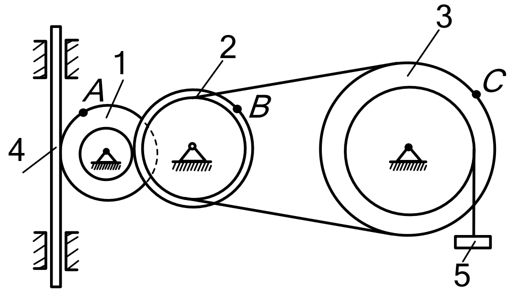


Рис. К2.8

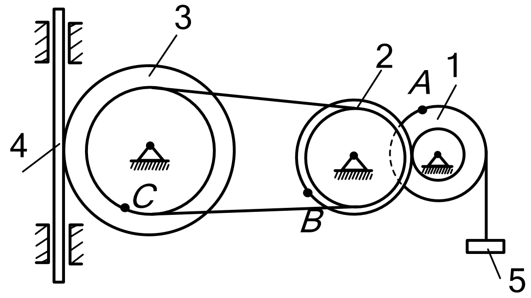


Рис. К2.9

<u>Пример К2 а</u>. Рейка *1*, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_2 и колесо *3* радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. К2.а). Рейка движется по закону $s_1=f(t)$.

<u>Дано</u>: R_2= 6 см, r_2 = 4 см, R_3 = 8 см, r_3 = 3 см, $s_1=3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), A – точка обода колеса *3*, t_1 = 3 с.

<u>Определить</u>: ω_3, v_4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

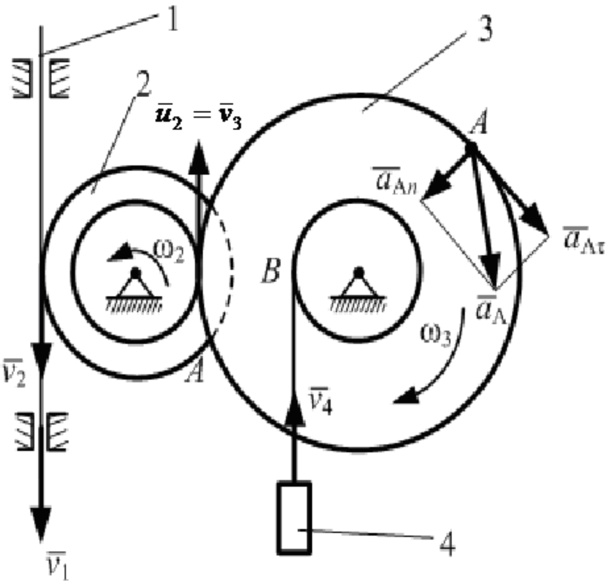


Рис. К2 а

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колеса (радиуса R_i), через v_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки *1*, находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \tag{1}$$

Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ или $\omega_2 R_2 = v_1$. Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = v_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2,\ \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \tag{2}$$

Тогда для момента времени t_1 = 3 с получим $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$.

2. Определяем v_4. Так как $v_4 = v_B = \omega_3 r_3$, то при t_1 = 3 с $v_4 = 20{,}25$ см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t$. Тогда при t_1 = 3 с $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с$^{-2}$.

4. Определяем a_A. Для точки *A* $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 с имеем

$a_{A\tau} = 36$ см/с^2, $a_{An} = 364{,}5$ см/с^2; $a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3$ см/с^2.

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.а.

Ответ: $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$; $v_4 = 20{,}25$ см/с; $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с$^{-2}$; $a_A = 366{,}3$ см/с^2.

Пример К2 б. Рейка *4*, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_2, ступенчатое колесо *1* с радиусами R_1 и r_1 и ступенчатое колесо *3* с радиусами R_3 и r_3 находятся в зацеплении, на шкив радиуса r_3 намотана нить с грузом *5* на конце (рис. К2.б). Угловая скорость колеса *1* изменяется по закону $\omega_1 = f(t)$.

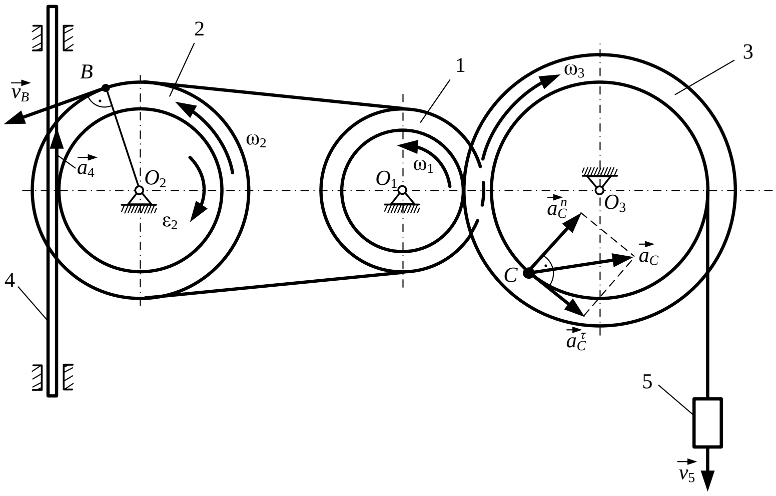


Рис. К2 б

Дано: r_1=2 см, R_1=4 см, r_2=6 см, R_2=8 см, r_3=12 см, R_3=16 см, $\omega_1 = 5t - 2t^2$, t_1=2 см.

Определить: v_5, v_B, ε_2, a_C, a_4 в момент времени $t = t_1$.

Решение. 1. Определим скорость точки *B* ремня, передаваемую от колеса *1* колесу *2*: $v_B = \omega_1 R_1 = (5t - 2t^2)R_1$. При t_1= 2 с $v_B = 8$ см/с.

2. Зная скорость точки *B* колеса *2*, можно определить угловую скорость вращения колеса $\omega_2 = \dfrac{v_B}{R_2} = (5t - 2t^2)\dfrac{R_1}{R_2}$ и угловое ускорение колеса $\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = (5 - 4t)\dfrac{R_1}{R_2}$.

При t_1=2 с $\varepsilon_2 = -1{,}5$ с$^{-2}$.

3. Определим скорость точек соприкосновения колеса *2* и рейки *4* $v_4 = \omega_2 r_2 = (5t - 2t^2)\dfrac{R_1 r_2}{R_2}$. Зная закон изменения скорости рейки, можно сразу определить ее ускорение, т.к. рейка совершает поступательное движение $a_4 = \dot{v}_4 = (5 - 4t)\dfrac{R_1 r_2}{R_2}$. При t_1=2 с $a_4 = -9$ см/с^2.

4. Колеса *3* и *1* находятся во внешнем зацеплении, поэтому скорости точек их соприкосновения одинаковы в любой момент времени $\omega_3 R_3 = \omega_1 r_1$, откуда находим $\omega_3 = \omega_1 \dfrac{r_1}{R_3} = (5t - 2t^2)\dfrac{r_1}{R_3}$.

Груз *5* прикреплен к концу нерастяжимой нити, которая сходит с внутреннего обода колеса *3*, следовательно, $v_5 = \omega_3 r_3 = (5t - 2t^2)\dfrac{r_1 r_3}{R_3}$. При t_1=2 с $v_5 = 3$ см/с.

5. Определим вращательное ускорение точки *C* $a_C^{вр} = \varepsilon_3 r_3$, где $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = (5 - 4t)\dfrac{r_1}{R_3}$, тогда $a_C^{\tau} = (5 - 4t)\dfrac{r_1 r_3}{R_3}$. Центростремительное ускорение точки *C* $a_C^{ц} = r_3 \omega_3{}^2 = (5t - 2t^2)^2 \dfrac{r_1^2}{R_3^2} r_3$. При t_1=2 с $a_C^{вр} = -4{,}5$ см/с², $a_C^{ц} = 0{,}375$ см/с².

Т.к. $\bar{a}_C^{\tau} \perp \bar{a}_C^{n}$, то $a_C = \sqrt{\left(a_C^{\tau}\right)^2 + \left(a_C^{n}\right)^2} = 4{,}52$ см/с².

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рисунке К2.б.

Ответ: $v_B = 8$ см/с, $v_5 = 3$ см/с, $\varepsilon_2 = -1{,}5$ с$^{-2}$, $a_4 = -9$ см/с², $a_C = 4{,}52$ см/с².

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна *B* или *E* (рис. К3.0…К3.7) или из стержней *1, 2, 3* и ползунов *B* и *E* (рис. К3.8…К3.9), соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами; точка *D* находится в середине стержня *AB*. Длины стержней равны соответственно l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ.Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0…4) или в табл. К3б (для рис. 5…9); при этом в табл. К3а ω_1 и ω_2 – величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблице в столбце «Найти». Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от *DB* по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 – против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить, как в примере К3 а (см. рис. К3 б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{v}_B$ и ускорение a_B – от точки *B* к *b* (на рис. 5–9).

Таблица К3а (к рис. К3.0–К3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	*v* точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
1	90	120	150	0	30	–	4	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
2	30	60	30	0	120	5	–	*B*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
3	60	150	150	90	30	–	5	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
4	30	30	60	0	150	4	–	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
5	90	120	120	90	60	–	6	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
6	90	150	120	90	30	3	–	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
7	0	60	60	0	120	–	2	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
8	60	150	120	90	30	2	–	*D*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
9	30	120	150	0	60	–	8	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*

Таблица К3б (к рис. К3.5–К3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с	v_B, м/с	a_B, м/с^2	*v* точек	ω звена	*a* точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	*B*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	*A*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	*B*, *E*	*AB*	*B*	*AB*
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	*D*, *E*	*DE*	*A*	*AB*
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	*A*, *E*	*AB*	*A*	*AB*
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	*B*, *E*	*DE*	*B*	*AB*
9	60	60	60	90	30	–	–	5	4	*D*, *E*	*AB*	*A*	*AB*

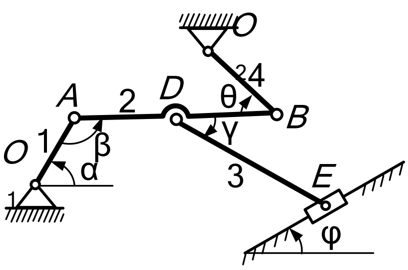


Рис. К3.0

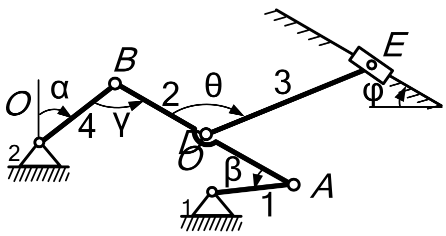


Рис. К3.1

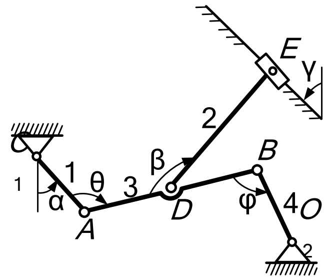


Рис. КЗ.2

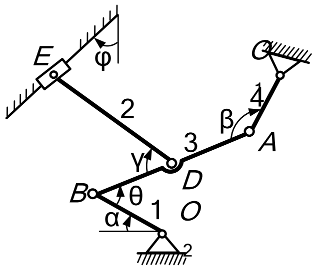


Рис. КЗ.3

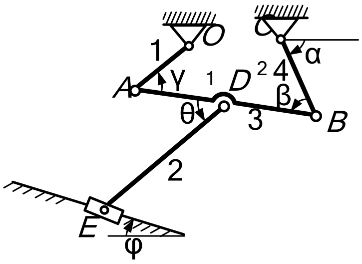


Рис. КЗ.4

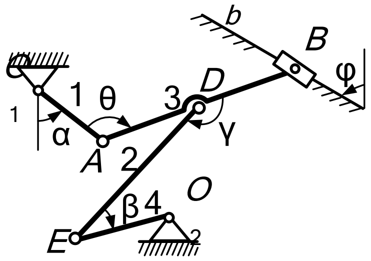


Рис. КЗ.5

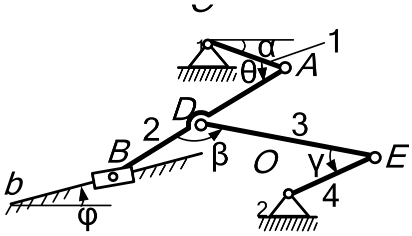


Рис. КЗ.6

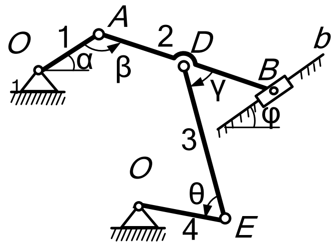


Рис. КЗ.7

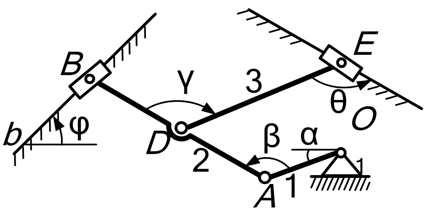


Рис. КЗ.8

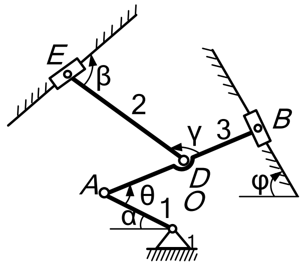


Рис. КЗ.9

Указания. Задача КЗ – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При её решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену механизма в отдельности**.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$, где A – точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка A движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$); B – точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (в случае, когда точка B тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного примера КЗ).

<u>Пример К3 а.</u> Механизм (рис. К3 а) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

<u>Дано</u>: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, $\omega_1 = 2\,\text{с}^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7\,\text{с}^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки).

<u>Определить</u>: v_B, v_E, ω_2, a_B, ε_3.

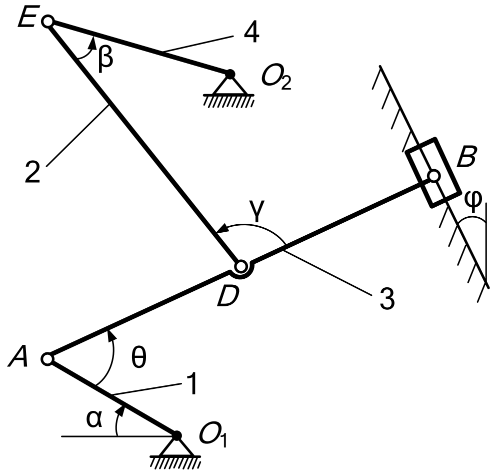


Рис. К3 а

Решение. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3 б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

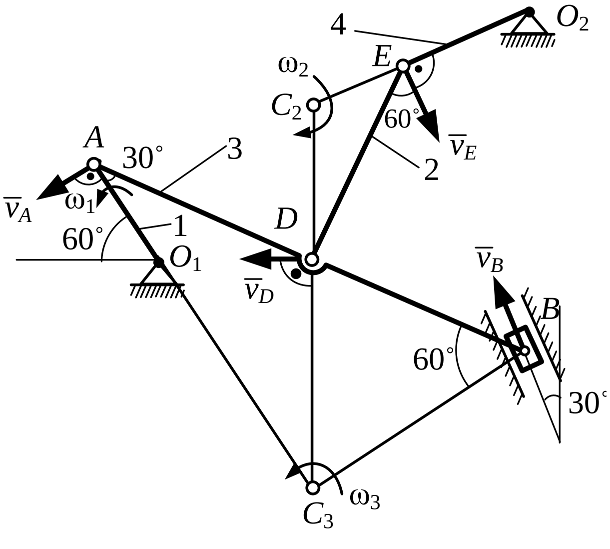


Рис. К3 б

1. Определяем v_B. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти v_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{v}_A$; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8\,\text{м/с}; \quad \bar{v}_A \perp O_1A. \tag{1}$$

Направление $\bar{v}_B$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{v}_A$ и направление $\bar{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \text{ и } v_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{2}$$

2. Определяем $\bar{v}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, восстановленных из точек A и B (к $\bar{v}_A$ перпендикулярен стержень *1*). По направлению вектора $\bar{v}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \tag{3}$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB\sin 30^\circ = 0{,}5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_D \perp C_3D. \tag{4}$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восстанавливая из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\bar{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \; v_E = v_D = 0{,}46 \text{ м/с .м/с}. \tag{5}$$

3.Определяем ω_2. Так как МЦС стержня *2* известен (точка C_2) и $C_2D = l_2/(2\cos 30^\circ) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2 D} = 0{,}67\ \text{с}^{-1}. \qquad (6)$$

4. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. К3 в), на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\bar{a}_A^\tau = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8\,\text{м/с};\ a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6\,\text{м/с}. \qquad (7)$$

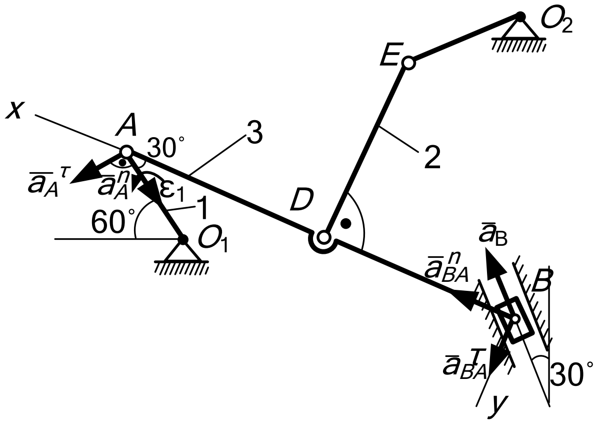


Рис. К3 в

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1,а $\bar{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К3 в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar{v}_B$.

Для определения $\bar{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar{a}_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A) и $\bar{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0{,}66\ \text{с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0{,}61\,\text{м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (8) на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\bar{a}_{BA}^\tau$.

Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar{a}_B$ направлен как показано на рис. К3 в.

5. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^τ. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное *AB* (ось *y*). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3{,}58$ м/с^2. Знак указывает, что направление $\bar{a}_{BA}^\tau$ противоположно показанному на рис. К3 в.

Теперь из равенства $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l^3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 0{,}46$ м/с; $v_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$; $a_B = 0{,}72$ м/с^2; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ с$^{-2}$.

Примечание. Если точка *B*, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К3.0…К3.4, где *B* движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\bar{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\bar{a}_B$ также следует представить двумя составляющими $(\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n)$ и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}_B^n$ (см., например, рис. К3.0) будет направлен вдоль BO_2, а вектор $\bar{a}_B^\tau$ – перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^τ, a_A^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть a_A^τ=0 или a_A^n=0, если точка *A* движется прямолинейно).

Значение $\bar{a}_B^n$ также вычисляется по формуле $a_B^n = v_B^2/\rho = v_B^2/l$, где l – радиус окружности O_2B, а v_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^τ, можем вычислить искомое уравнение $a_B = \sqrt{\left(a_B^\tau\right)^2 + \left(a_B^n\right)^2}$. Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

<u>Пример К3 б</u>. Механизм (рисунок К3 г) состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

<u>Дано</u>: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, *AD*=*DB*, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}6$ м, $\omega_1 = 5$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 8$ с$^{-2}$.

<u>Определить</u>: v_B, v_E, ω_{DE}, a_B, ε_{AB}.

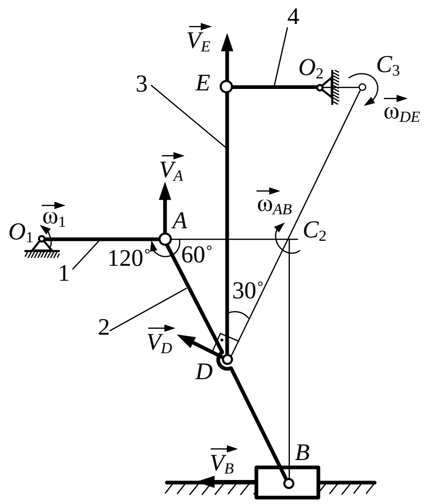


Рис. К3 г

Решение. Звенья *1* и *4* механизма совершают простейшее вращательное движение, звенья *2* и *3* – плоское, ползун *B* движется поступательно.

1. Определим скорость точки *A* как скорость точки, принадлежащей звену *1*: $v_A = l_1\omega_1 = 0{,}4 \cdot 5 = 2$ м/с. Покажем $\bar{v}_A \perp O_1A$ с учетом направления угловой скорости ω_1. Точка *B* принадлежит одновременно звену *2* и ползуну и в силу наложенных связей может двигаться только вдоль направляющих, следовательно, вектор скорости точки *B* может быть направлен только горизонтально. Для определения скорости точки *B* найдем положение мгновенного центра скоростей (МЦС) звена *2* на пересечении перпендикуляров к скоростям точек *A* и *B* (точка C_2).

2. Определим угловую скорость вращения звена *2* относительно его МЦС, зная скорость точки *A* и вычислив расстояние C_2A от точки *A* до МЦС $C_2A = AB \cdot \cos 60° = 1{,}2\cos 60° = 0{,}6$ м: $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{C_2A} = \dfrac{2}{0{,}6} = 3{,}333\ c^{-1}$.

Направление ω_{AB} покажем с учетом направления вектора $\bar{v}_A$.

3. Определим скорость точки *B*, вычислив расстояние C_2B от точки *B* до МЦС $C_2B = AB\sin 60° = 1{,}2\sin 60° = 1{,}039$ м:

$v_B = \omega_{AB} \cdot C_2B = 3{,}333 \cdot 1{,}039 = 3{,}463$ м/с.

Направление вектора $\bar{v}_B$ покажем с учетом направления ω_{AB}.

4. Точка *D* также принадлежит звену *2*, следовательно, ее скорость можно определить относительно МЦС звена *2*, вычислив расстояние C_2D от точки *D* до МЦС $C_2D = C_2A = 0{,}6$ м. Следовательно, $v_D = 3{,}333 \cdot 0{,}6 = 2$ м/с. Покажем вектор скорости точки *D* ($\bar{v}_D \perp C_2D$) с учетом направления ω_{AB}.

Одновременно точка *D* принадлежит звену *3*, также совершающему плоское движение. Точка *E*, также принадлежащая звену *3* в силу наложенных на нее связей может двигаться только по окружности радиусом O_2E, следовательно, вектор скорости точки *E* обязательно будет перпендикулярен O_2E. МЦС звена *3* находится на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек *D* и *E* (точка C_3). Определяем угловую скорость звена *3* ω_{DE} относительно его МЦС, вычислив расстояние $C_3D = \dfrac{DE}{\cos 30°} = \dfrac{1{,}4}{\cos 30°} = 1{,}616$ м:

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{2}{1{,}616} = 1{,}238\ \text{с}^{-1}.$$

Направление ω_{DE} покажем с учетом направления вектора $\bar{v}_D$.

Скорость точки *E* определим относительно МЦС звена *3*, вычислив расстояние $C_3E = DE \cdot tg30° = 1{,}4tg30° = 0{,}808$ м:

$v_E = \omega_{DE} \cdot C_3E = 1{,}238 \cdot 0{,}808 = 1$ м/с.

5. Определим ускорение точки *B* $\vec{a}_B$ (рис. К3 д). Точка *B* принадлежит звену *2*, совершающему плоское движение. Выберем за полюс точку *A*. Тогда

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA},$$

где $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$ – ускорение полюса; $\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$ – ускорение, получаемое точкой *B* при вращении плоской фигуры вокруг полюса; $a_B^n = \omega_1 l_1 = 10$ м/с^2; $a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 3{,}2$ м/с^2; $a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 l_2 = 13{,}33$ м/с^2; $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} AB$;

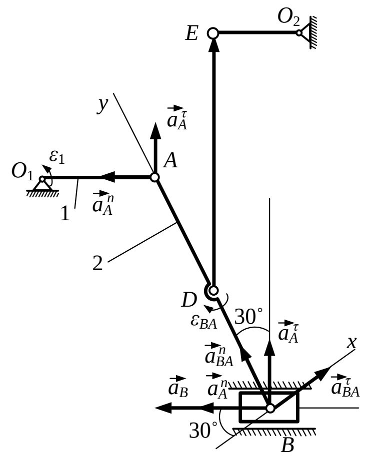


Рис. К3 д

Проведем оси координат Bxy и спроецируем равенство $\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ на эти оси

$$-a_B \cos 30° = -a_A^n \cos 30° + a_A^\tau + a_{BA}^\tau;$$

$$a_B \sin 30° = a_A^n \sin 30° + a_A^\tau \cos 30° + a_{BA}^n;$$

Из первого равенства находим

$$a_B = \frac{a_B^n \sin 30° + a_A^\tau \cos 30° + a_{BA}^n}{\sin 30°} = \frac{10 \sin 30° + 3{,}2 \cos 30° + 13{,}33}{\sin 30°} = 42{,}202 \text{ м/с}^2.$$

Из второго равенства определяем ε_{AB}

$$a_{BA}^\tau = -a_B \cos 30° + a_B^n \cos 30° - a_a^\tau \sin 30° = -42{,}202 \cos 30° + 10 \cos 30° - 3{,}2 \sin 30°$$

$$a_{BA}^\tau = -29{,}487 \text{м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^\tau\right|}{AB} = \frac{29{,}487}{1{,}2} = 24{,}573 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 3{,}463$ м/с, $v_E = 1$ м/с, $\omega_{DE} = 1{,}238 \text{с}^{-1}, a_B = 42{,}202$ м/с^2, $\varepsilon_{AB} = 24{,}573 \text{с}^{-2}$.

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0…К4.4) или круглая пластина радиусом R = 60 см (рис. К4.5…К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданной в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0…4) или по окружности радиуса R (рис. 5…9), движется точка M; закон её относительного движения т.е. зависимость

$s = AM = f_2(t)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0 – 4 и для рис. 5 – 9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$с.

Указания. Задача К4 – на сложное движение точки. Для её решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1$с и изобразить точку именно в этом положении, а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче. В случаях, относящихся к рис. 5…9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0…4		Для рис. 5…9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \breve{AM} = f_2(t)$
1	2	3	4	5	6
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$4/3\ R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 3t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

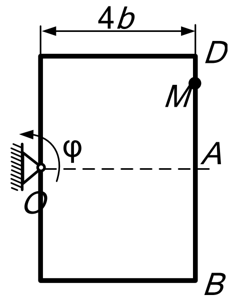


Рис. К4.0

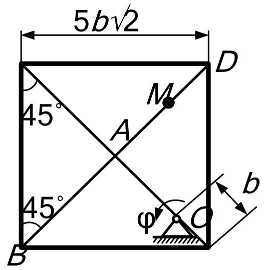


Рис. К4.1

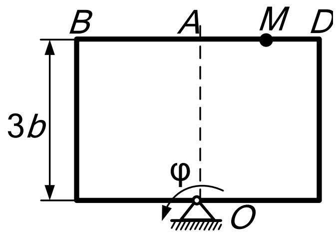


Рис. К4.2

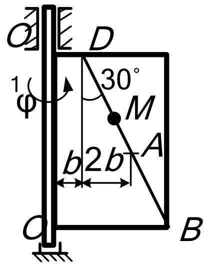


Рис. К4.3

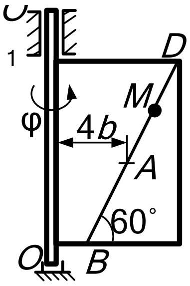


Рис. К4.4

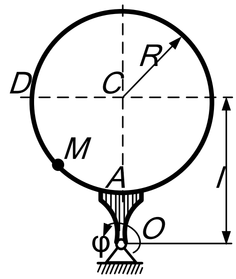


Рис. К4.5

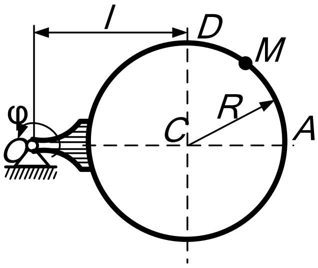


Рис. К4.6

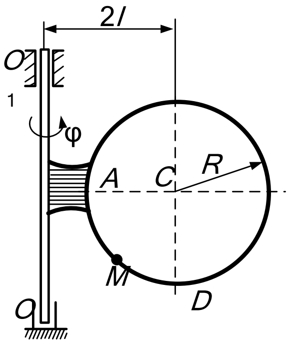


Рис. К4.7

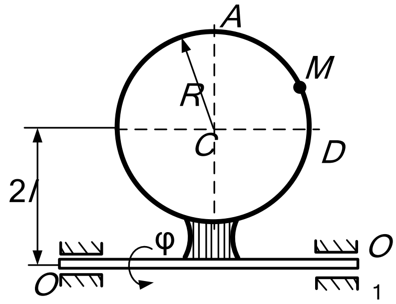


Рис. К4.8

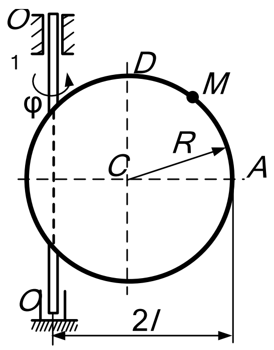


Рис. К4.9

Пример К4 а. Пластина $OEAB_1D$ ($OE=OD$, рис. К4 а) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону

$\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону $s = \overset{\cup}{AB} = f_2(t)$ (положительное направление отсчета s – от A к B).

Дано: $R = 0{,}5$м, $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$, $s = \pi R\cos(\pi t/3)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах).

Определить: $v_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{абс}$ и абсолютное ускорение точки $\bar{a}_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер},$$

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \tag{1}$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}^{\tau}_{отн} + \bar{a}^{n}_{отн}, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер}.$$

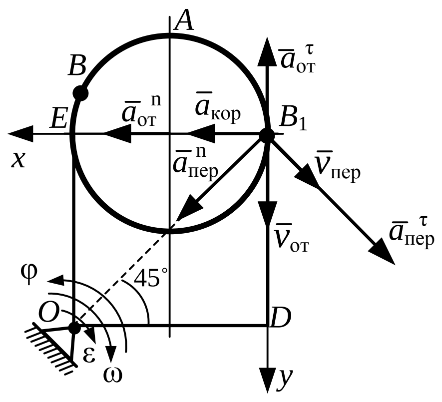


Рис. К4 а

Определим все, входящие в равенства (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \overset{\cup}{AB} = \pi R\cos(\pi t/3). \tag{2}$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t. Полагая в уравнении (2) $t_1 = 2$ с , получим

$$s_1 = \pi R\cos(2\pi/3) = -0{,}5\pi R.$$

Тогда

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -0{,}5\pi.$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка B в момент $t_1 = 2$ с находится справа от точки A. Изображаем ее на рис. К4а в этом положении (точка B_1). Теперь находим числовые значения $v_{\text{отн}}$, $a^{\tau}_{\text{отн}}$, $a^{n}_{\text{отн}}$:

$$v_{\text{отн}} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(\pi t/3),$$

$$a^{\tau}_{\text{отн}} = \dot{v}_{\text{отн}} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(\pi t/3),\ a^{n}_{\text{отн}} = \frac{v^2_{\text{отн}}}{\rho_{\text{отн}}} = \frac{v^2_{\text{отн}}}{R},$$

где $\rho_{\text{отн}}$ – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R. Для момента $t_1 = 2$ с, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим:

$$v_{\text{отн}} = -\frac{\pi^2 R}{3}\sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{12} = -1{,}42\ \text{м/с},$$

$$a^{\tau}_{\text{отн}} = -\frac{\pi^3 R}{9}\cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0{,}86\ \text{м/с}^2,\ a^{n}_{\text{отн}} = \frac{\pi^4}{24} = 4{,}06\ \text{м/с}^2. \qquad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}^{\tau}_{\text{отн}}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ – в противоположную сторону; вектор $\bar{a}^{n}_{\text{отн}}$ направлен к центру C окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К4а.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0{,}5t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1{,}5t^2,\ \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при t_1 =2с

$$\omega = -2\,\text{с}^{-1},\ \ \varepsilon = -4\,\text{с}^{-2}. \qquad (4)$$

Знаки указывают, что в момент t_1 =2с направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ; отметим это на рис. К4а.

Для определения $\bar{v}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O. Из рисунка видно, что $h_1 = 2R\sqrt{2} = 1{,}41$м. Тогда в момент времени $t_1 = 2$ с, учитывая равенства (4), получим

$$v_{\text{пер}} = |\omega|\cdot h_1 = 2{,}82\ \text{м/с},$$

$$a^{\tau}_{\text{пер}} = |\varepsilon|\cdot h_1 = 5{,}64\ \text{м/с}^2,\ \ a^{\text{n}}_{\text{пер}} = \omega^2 h_1 = 5{,}64\ \text{м/с}^2. \qquad (5)$$

Изображаем на рис. К4а векторы $\bar{v}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\bar{a}^{\text{n}}_{\text{пер}}$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле $a_{\text{кор}} = 2|v_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin\alpha$, где α – угол между вектором $\bar{v}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$). В нашем случае этот угол равен 90°, так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$. Численно в момент времени $t_1 = 2$ с, так как в этот момент $|v_{\text{отн}}| = 1{,}42$ м/с и $|\omega| = 2\,\text{c}^{-1}$, получим

$$a_{\text{кор}} = 5{,}68\ \text{м/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Н.Е.Жуковского: так как вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω, т.е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\bar{a}_{\text{кор}}$ на рис. К4а. (Иначе направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ можно найти, учтя, что $a_{\text{кор}} = 2(\overline{\omega} \times v_{\text{отн}})$.)

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $v_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. Определение $v_{\text{абс}}$. Проведем координатные оси B_1xy (см. рис. К4а) и спроектируем почленно обе части равенства $\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$v_{\text{абс}\,x} = v_{\text{отн}\,x} + v_{\text{пер}\,x} = 0 - |v_{\text{пер}}|\cos 45^\circ = -1{,}99\ \text{м/с};$$

$$v_{\text{абс}\,y} = v_{\text{отн}\,y} + v_{\text{пер}\,y} = |v_{\text{отн}}| + |v_{\text{пер}}|\cos 45^\circ = 3{,}41\ \text{м/с}.$$

После этого находим

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v^2_{\text{абс}\,x} + v^2_{\text{абс}\,y}} = 3{,}95\ \text{м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\bar{v}_{\text{отн}}$ и $\bar{v}_{\text{пер}}$ равен 45°, значение $v_{\text{абс}}$ можно еще определить по формуле

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v^2_{\text{отн}} + v^2_{\text{пер}} + 2|v_{\text{отн}}| \cdot |v_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ} = 3{,}95\ \text{м/с}.$$

5. Определение $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}^{\tau}_{\text{отн}} + \bar{a}^{n}_{\text{отн}} + \bar{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \bar{a}^{n}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{\text{абс}}$ спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси B_1xy. Получим

$$a_{\text{абс}\,x} = a^{\text{n}}_{\text{отн}} + a_{\text{кор}} + a^{\text{n}}_{\text{пер}}\cos 45^\circ - |a^{\tau}_{\text{пер}}|\cos 45^\circ,$$

$$a_{\text{абс}\,y} = a^{\text{n}}_{\text{пер}}\cos 45^\circ - |a^{\tau}_{\text{пер}}|\cos 45^\circ - |a^{\tau}_{\text{отн}}|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени $t_1 = 2$ с, найдем, что в этот момент

$$a_{\text{абс}\ x} = 9{,}74\ \text{м/с}^2,\ a_{\text{абс}\ y} = 7{,}15\ \text{м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a^2_{\text{абс}\,x} + a^2_{\text{абс}\,y}} = 12{,}08\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $v_{\text{абс}}$=3,95 м/с, $a_{\text{абс}}$=12,08 м/с^2.

<u>Пример К4 б</u>. Треугольная пластина *ADE* вращается вокруг оси *z* по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4б дуговой стрелкой). По гипотенузе *AD* движется точка *B* по закону $s = AB = f_2(t)$; положительное направление отсчета *s* – от *A* к *D*.

<u>Дано</u>: $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$, $s = AB = 2 + 15t - 3t^2$; (φ – в радианах, *s* – в сантиметрах, t – с секундах).

<u>Определить</u>: $v_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$ в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки *B* как сложное, считая ее движение по прямой *AD* относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{\text{абс}}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{\text{абс}}$ найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}},\ \bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{кор}, \qquad (1)$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{\text{пер}} = \bar{a}^{\tau}_{\text{пер}} + \bar{a}^{n}_{пер}$.

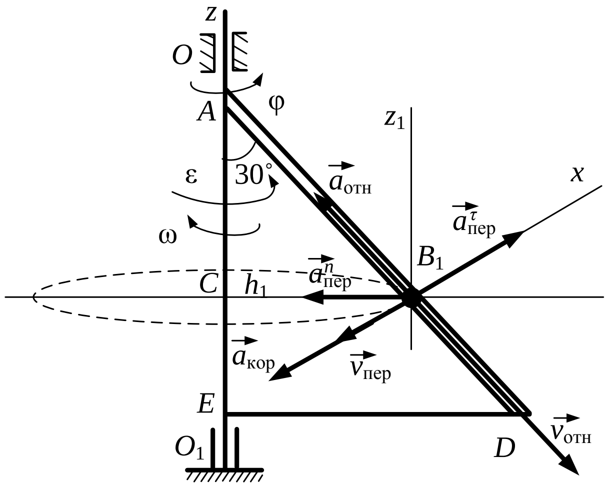


Рис. К4 б

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2. \qquad (2)$$

Поэтому

$$v_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t,\; a_{отн} = \dot{v}_{отн} = -6.$$

В момент времени t_1 = 2 с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20\,\text{см},\; v_{отн} = 3\,\text{см/с},\; a_{отн} = -6\ \text{см/с}^2. \qquad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{v}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета дуговой координаты *s*, а вектор $\bar{a}_{отн}$ – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. К4б.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 0{,}1t^3 - 2{,}2t$.

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения: $\omega = \dot{\varphi} = 0{,}3t^2 - 2{,}2$; $\varepsilon = \dot{\omega} = 0{,}6t$ и при t_1 = 2 с,

$$\omega = -1\ \text{с}^{-1},\; \varepsilon = 1{,}2\ \text{с}^{-2}. \qquad (4)$$

Знаки указывают, что в момент t_1 = 2 с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. К4б, соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения *z*: $h_1 = AB_1 \sin 30^\circ$. Тогда в момент t_1 = 2 с, учитывая равенства (4), получим

$$v_{пер} = |\omega| \cdot h_1 = 10\,\text{см/с},$$

$$a^{\tau}_{пер} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 12\,\text{см/с}^2,\; a^{n}_{пер} = \omega^2 h_1 = 10\ \text{см/с}^2. \qquad (5)$$

Изобразим на рис. К4б векторы $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ (с учетом знаков ω и ε) и $\bar{a}^{n}_{пер}$; направлены векторы $\bar{v}_{пер}$ и $\bar{a}^{\tau}_{пер}$ перпендикулярно плоскости ADE, а вектор $\bar{a}^{n}_{пер}$ по линии B_1C к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{отн}$ и осью вращения (вектором $\overline{\omega}$) равен 30°, то численно в момент времени t_1=2 с

$$a_{кор} = 2 \cdot |v_{отн}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^\circ = 3\,\text{см/с}^2. \qquad (6)$$

Направление $\bar{a}_{кор}$ найдем по правилу Н.Е.Жуковского. Для этого вектор $\bar{v}_{отн}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\bar{a}^{n}_{пер}$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω, т.е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\bar{a}_{кор}$. Он направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\bar{v}_{пер}$ (см. рис. К4б).

4. Определение $v_{абс}$. Так как $\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$, а векторы $\bar{v}_{отн}$ и $\bar{v}_{пер}$ взаимно перпендикулярны, то $v_{абс} = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2}$; в момент времени t_1 = 2 с $v_{абс}$ = 10,44 см/с.

5. Определение $a_{абс}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^{n} + \bar{a}_{кор}. \qquad (7)$$

Для определения $a_{абс}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\bar{a}_{абс}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}_{пер}^{\tau}$ и $\bar{a}_{кор}$ лежат на оси x, а векторы $\bar{a}_{пер}^{n}$ и $\bar{a}_{отн}$ расположены в плоскости B_1yz_1 т.е. в плоскости пластины. Тогда, проектируя обе части равенства (7) на оси B_1xyz_1 и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени t_1 = 2 с:

$$a_{абс\,x} = \left|a_{пер}^{\tau}\right| - a_{кор} = 9\,\text{см/с}^2,$$

$$a_{абс\,y} = a_{пер}^{n} + \left|a_{отн}\right|\sin 30^\circ = 13\,\text{см/с}^2,$$

$$a_{абс\,z} = \left|a_{отн}\right|\cos 30^\circ = 5{,}20\,\text{см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{абс}$

$$a_{абс} = \sqrt{a_{абс\,x}^2 + a_{абс\,y}^2 + a_{абс\,z}^2} = 16{,}64\,\text{см/с}^2.$$

Ответ: $v_{абс} = 10{,}44\,\text{см/с}$, $a_{абс} = 16{,}64\,\text{см/с}^2$.

Тест по разделу «Кинематика»

Кинематика точки

1. Ускорение точки характеризует:

Ответ:

а) изменение вектора скорости по величине;

б) изменение вектора скорости по направлению;

в) изменение вектора скорости по величине и направлению.

2. При векторном способе задания движения материальной точки ее положение в пространстве в любой момент времени задается:

Ответ:

а) декартовыми координатами;

б) дуговой координатой;

в) радиус-вектором.

3. При естественном задании движения траектория в малых окрестностях точки может рассматриваться как плоская кривая, целиком расположенная в соприкасающейся плоскости, определяемой двумя осями естественного трехгранника:

Ответ:

а) касательной τ и главной нормалью n;

б) касательной τ и бинормалью b;

в) главной нормалью n и бинормалью b.

4. Мгновенное значение скорости точки при координатном способе задания определяется по формулам:

Ответ:

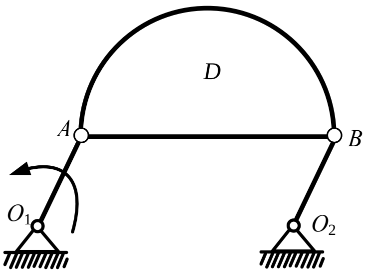
а) $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$; б) $v = \dfrac{ds}{dt}$; в) $v = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}$.

5. Если точка движется по кривой линии с постоянной скоростью, ее ускорение равно:

а) $a = \dfrac{dv}{dt}$; б) $a = \dfrac{v^2}{\rho}$; в) $a = 0$.

Кинематика твердого тела

6. Какое движение совершает тело D, если $O_1A = O_2B$:



а) поступательное;

б) вращательное;

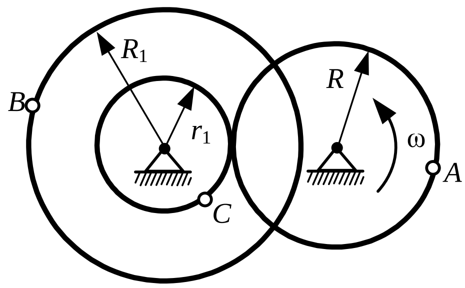
в) плоскопараллельное.

7. Скорость какой точки схемы определяется по формуле $v = \dfrac{\omega R}{r_1} R_1$:

а) точки A;

б) точки B;

в) точки C.



8. Диск вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2 - 4t$. Чему равна угловая скорость вращения через 1 секунду после начала движения:

а) $-4\,\text{с}^{-1}$;

б) 0;

в) 2 с^{-1}.

9. Тело вращается по закону $\varphi = -2t^3 + 3t^2$. В интервале времени $2 \le t < 3\,\text{с}$ движение тела:

а) замедленное;

б) равномерное;

в) ускоренное.

10. Где находится мгновенный центр скоростей точек плоской фигуры:

а) в точке пересечения векторов скоростей всех точек;

б) на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек, восстановленных в точках приложения;

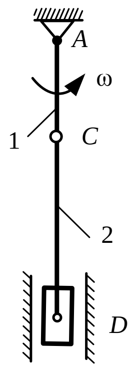
в) ни то ни другое.

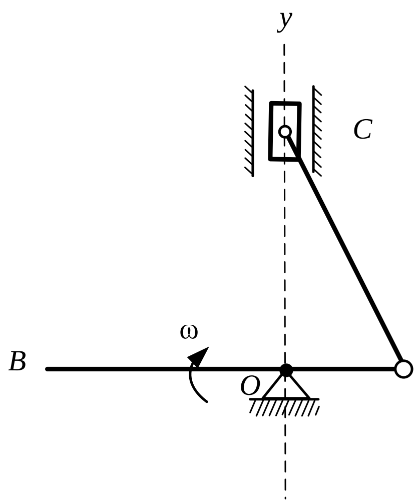
11. В какой точке находится мгновенный центр скоростей звена 2:

а) в точке A;

б) в точке C;

в) в точке D.





12. Какие тела совершают в данное мгновение поступательное движение:

а) только AC;

б) только ползун C;

в) AC и ползун C.

Сложное движение точки и твердого тела

13. Абсолютное ускорение точки в общем случае сложного движения складывается:

а) из относительного и переносного ускорений;

б) относительного, переносного и кориолисова ускорений;

в) относительного и кориолисова ускорений.

14. В каком случае ускорение Кориолиса равно нулю:

а) когда переносное движение поступательное;

б) когда переносное движение вращательное;

в) когда переносное движение плоское?

15. Какое движение твердого тела можно рассматривать как сложное?

а) поступательное;

б) вращательное;

в) плоскопараллельное?

СТАТИКА

Система сил – совокупность нескольких сил.

Эквивалентные системы сил – это системы, которые могут быть заменены одна $\left|\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right|$ другой $\left|\overline{\Phi}_1,...,\overline{\Phi}_n\right|$ без нарушения кинематического состояния тела:

$$\left|\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right| \infty \left|\Phi_1,...,\Phi_n\right|.$$

Равнодействующая сила $\overline{R}$ – эквивалентная системе сил:

$$\overline{R} \infty \left|\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right|.$$

Уравновешенная система сил – $\left|\overline{F}_1,...,\overline{F}_n \infty 0\right|$, под действием которой тело остается в исходном кинематическом состоянии.

Силы, равномерно распределенные по отрезку прямой, характеризуются интенсивностью – величиной силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка: q(Н/м). Равнодействующая сила $Q = qa$(Н) приложена в середине отрезка a.

Плоская система сил

Аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил

1. Равенство нулю сумм проекций сил на две координатные оси и суммы их моментов относительно любого центра:

$$\sum F_{kx} = 0,\ \sum F_{ky} = 0,\ \sum F_{kz} = 0.$$

2. Равенство нулю сумм моментов сил относительно двух центров и суммы их проекций на одну ось:

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \sum M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \sum F_{kx} = 0.$$

3. Равенство нулю сумм моментов сил относительно трех центров, лежащих на одной прямой.

$$\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \sum M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \sum M_C\left(\vec{F}_k\right) = 0.$$

Условия равновесия плоской системы параллельных сил

1. $\sum F_{ky} = 0,\ \sum M_O\left(\vec{F}_k\right) = 0.$

2. $\sum M_A\left(\vec{F}_k\right) = 0,\ \sum M_B\left(\vec{F}_k\right) = 0.$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: Момент равнодействующей плоской системы сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра: $\overline{M}_O\left(\vec{R}\right) = \sum \overline{M}_O\left(\vec{F}_k\right)$

Реакция стержневых опор характеризуется одним вектором силы, направленным вдоль оси стержня $\overline{R}_A$.

Реакция шарнирно неподвижной опоры характеризуется двумя проекциями вектора силы $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$.

Реакция шарнирно подвижной опоры характеризуется одним вектором силы, направленным по нормали к поверхности, вдоль которой опора допускает перемещение $\overline{R}_A$.

Реакция жесткой заделки характеризуется двумя проекциями силы и моментом в приведенном центре: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A$.

Равновесие системы тел с нежесткими связями рассматривается для каждого тела в отдельности, при этом связь заменяется на силы взаимодействия между телами. Если неизвестных получается больше числа уравнений равновесия – система статически неопределимая.

Равновесие при наличии сил трения учитывается во всех практических случаях, за исключением предельной силы трения в законе Амонтона–Кулона: $F_{пр} = fN$, где $f -$ коэффициент трения, $N -$ нормальная реакция.

Угол трения φ – угол между предельной реакцией и нормалью к поверхности $tg\varphi = \dfrac{F_{\text{пр}}}{N}$.

Конус трения – геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции.

Трение качения возникает в результате деформации поверхностей. Коэффициент трения качения пропорционален радиусу цилиндра и различен для различных материалов $\delta = 0{,}001 \ldots 0{,}1 \cdot 10^{-2}$ м. Момент сопротивления качению: $M = \delta N$.

Пространственная система сил

Момент силы относительно оси – скалярная величина, равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью $M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot h$.

Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр: $M_z(\vec{F}) = M_O \cos\gamma$, т.е. момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора, изображающего момент данной силы относительно любого центра, лежащего на оси.

Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно трех координатных осей:

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; \qquad M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z;; \qquad M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Основная теорема статики (теорема Пуансо): Любая система сил, приложенных к абсолютно твердому телу, может быть заменена одной силой (главным вектором данной системы сил $\overline{R}$) и одной парой сил (главным моментом данной системы сил $\overline{M}_0$).

Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил:

$$R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \qquad R_z = \sum F_{kz};$$

$$M_{0x} = \sum M_x(\vec{F}_k); \quad M_{0y} = \sum M_y(\vec{F}_k); \quad M_{0z} = \sum M_z(\vec{F}_k).$$

Частные случаи приведения пространственной системы сил

1) к паре сил $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 \neq 0$– на тело действует пара сил с моментом $\overline{M}_0$. Значение $\overline{M}_0$ не зависит от выбора центра приведения;

2) к равнодействующей $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 = 0$ – на тело действует равнодействующая, линия действия которой проходит через центр приведения *O*;

3) к динамическому винту (только если $\overline{R} \| \overline{M}$) $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 \neq 0$, ось винта проходит через центр приведения *O*;

4) случай равновесия $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0.$

Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0; \qquad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0; \qquad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия равновесия пространственной системы параллельных сил:

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \qquad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0.$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси:

Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси: $M_x(\vec{R}) = \sum M_x(\vec{F}_k)$.

Центр параллельных сил и центр тяжести

Центр параллельных сил – точка *C*, через которую проходит линия действия равнодействующей $\overline{R}$ системы параллельных сил $\overline{F}_k$ при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол.

Формулы для определения координат центра параллельных сил

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}, \qquad y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}, \qquad z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}.$$

Центр тяжести твердого тела – связанная с ним точка, через которую проходит линия действия равнодействующей $\overline{P}$ сил тяжести частиц $\overline{P}_k$ данного тела при любом положении тела в пространстве.

Формулы для определения координат центра тяжести тела

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P}; \; y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P}; \; z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P}.$$

Центр тяжести:

– объема $x_c = \dfrac{\sum V_k x_k}{V}; \; y_c = \dfrac{\sum V_k y_k}{V}; \; z_c = \dfrac{\sum V_k z_k}{V};$

– площади $x_c = \dfrac{\sum S_k x_k}{S}; \; y_c = \dfrac{\sum S_k y_k}{S}; \; z_c = \dfrac{\sum S_k z_k}{S};$

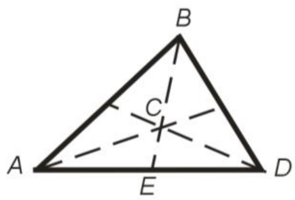
– линии $x_C = \dfrac{\sum l_k x_k}{L}; \; y_C = \dfrac{\sum l_k y_k}{L}; \; z_C = \dfrac{\sum l_k z_k}{L}.$

Способы определения положения центров тяжести тел: симметрия, разбиение, дополнение, интегрирование, экспериментальный.

Центр тяжести:

1) дуги окружности лежит на оси симметрии на расстоянии от центра, равном $x_C = R\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$, α – в радианах;

2) треугольника – в точке пересечения его медиан *CE*=1/3*BE*;



3) кругового сектора – на его оси симметрии на расстоянии от центра $x_C = \dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$, α – в радианах.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

Задача С1

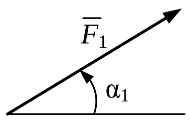
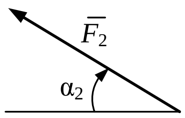
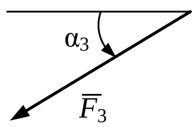
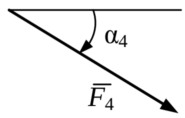
Жесткая рама, расположена в вертикальной плоскости, закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 25кН. На раму действует пара сил с моментом M = 100кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице.

Определить реакции связи в точках A, B, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять a = 0,5 м.

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. В ее решении учесть, что натяжение обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым, если брать на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, для которых плечи легко определяются, воспользоваться теоремой Вариньона, тогда $m_0(\overline{F}) = m_0(\overline{F}') + m_0(\overline{F}'')$.

Таблица С1

Силы								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
Номер усло-вия	Точка прило-жения	α_1, град	Точка прило-жения	α_2, град	Точка прило-жения	α_3, град	Точка прило-жения	α_4, град
0	H	30	-	-	-	-	K	60
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	K	75	-	-	-	-	E	30
3	-	-	K	60	H	30	-	-
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

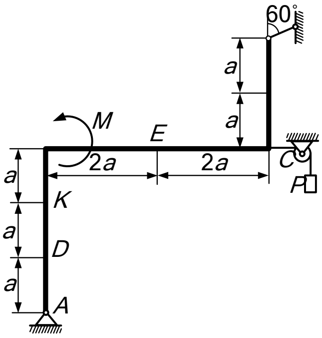


Рис. С1.0

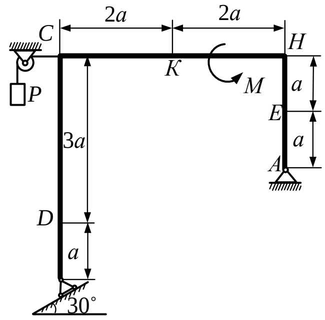


Рис. С1.1

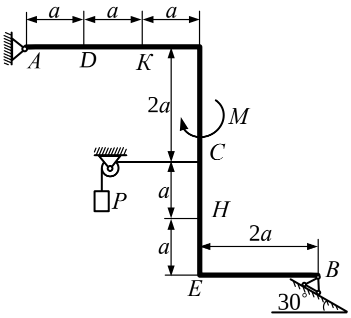


Рис. С1.2

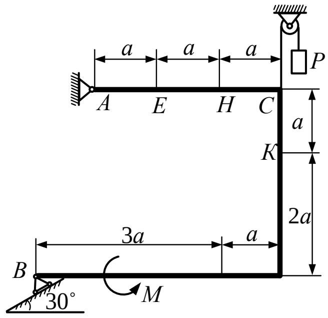


Рис. С1.3

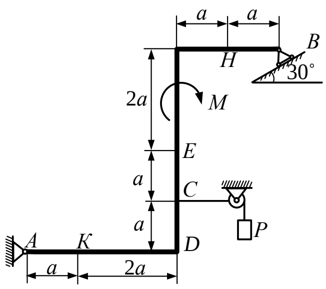


Рис. С1.4

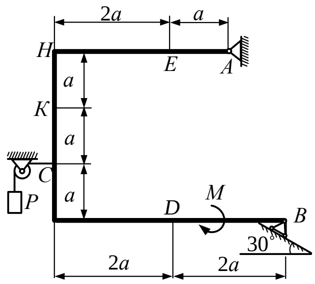


Рис. С1.5

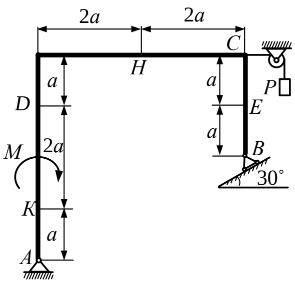


Рис. С1.6

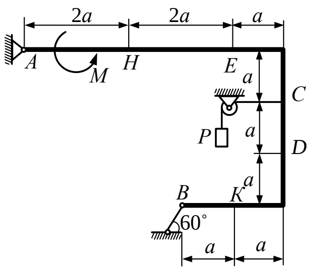


Рис. С1.7

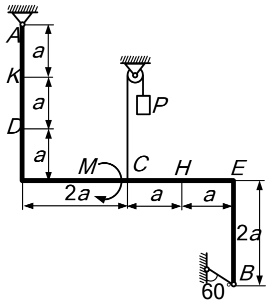


Рис. С1.8

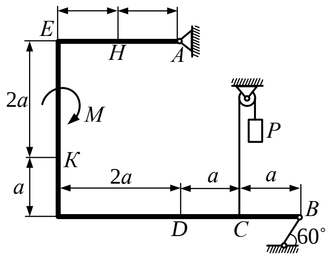


Рис. С1.9

Пример С1а. Жесткая пластина *ABCD* (рис. С1 а) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* – подвижную шарнирную, опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

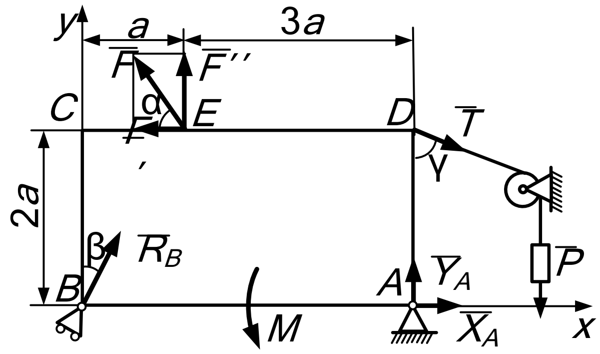


Рис. С1 а

Дано: F=25 кН, α = 60°, P = 18 кН, γ = 75°, M = 50 кН·м, β = 30°, a = 0,5 м.

Определить: реакции в точках *A* и *B*, вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на пластину силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом *M*, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки *A* воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}'$, $\overline{F}''$ ($F' = F\cos\alpha$, $\overline{F}'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + R_B\sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + R_B\cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0;$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,$$

$$M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8{,}5$кН; $Y_A = -23{,}3$ кН; R_B = 7,3 кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1а.

<u>Пример С1б.</u> Жесткая рама (рис. С1 б) имеет в точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* закреплена невесомым стержнем. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

<u>Дано</u>: $F = 10$ кН, $P = 25$ кН, $M = 100$ кН·м, $a = 0{,}5$ м.

<u>Определить</u>: реакции в точках *A* и *B*, вызываемые действующими нагрузками.

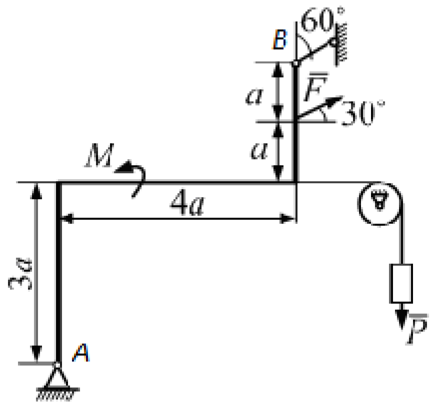


Рис. С1б

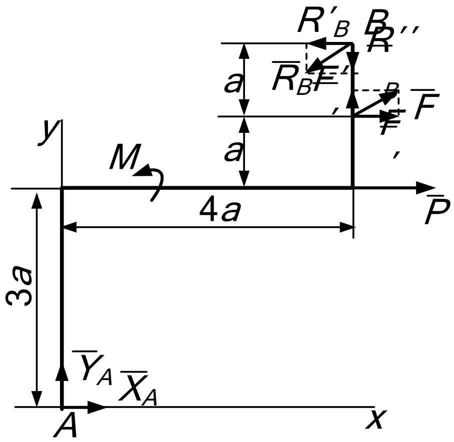


Рис. С1в

Решение.

1. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси *xy* и изобразим действующие на раму силы: силу $\overline{F}$, пару сил с моментом *M*, натяжение троса $\overline{T}$ (по модулю *T* = *P)* и реакции связей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры *A* изображаем двумя ее составляющими, реакцию стержня изображаем вдоль оси стержня, полагая, что стержень находится под растягивающей нагрузкой) (рис. С1 в).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\overline{F}$ относительно точки *A* воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\overline{F}$ на составляющие $\overline{F}'$, $\overline{F}''$ ($F' = F\cos 30^\circ$, $F'' = F\sin 30^\circ$) и учтем, что $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'')$.

Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A + P + F\cos 30^\circ - R_B \sin 60^\circ = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A + F\sin 30^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0, \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$$

$$M - 3a \cdot P - 4a \cdot F\cos 30^\circ + 4a \cdot F\sin 30^\circ + 5a \cdot R_B \sin 60^\circ - \\ - 4a \cdot R_B \cos 60^\circ = 0. \qquad (3)$$

Из (3): $R_B = \dfrac{3aP - M - 4aF(\sin 30^\circ - \cos 30^\circ)}{a(5\sin 60^\circ - 4\cos 60^\circ)} = 144{,}855\ кН$,

Из (1): $X_A = R_B \sin 60^\circ - P - F\cos 30^\circ = 91{,}784\ кН$,

Из (2): $Y_A = R_B \cos 60^\circ - F\sin 30^\circ = 67{,}428\ кН$.

Ответ: $X_A = 91{,}784$ кН; $Y_A = 67{,}428$ кН; $R_B = 144{,}855$ кН. Знаки указывают, что силы $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и $\overline{R}_B$ направлены так как показано на рис. С1 б.

Задача С2

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке *A*, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке *B* и невесомым стержнем *1* (рис. С2.0…С2.7) или же двумя подшипниками в точках *A* и *B* и двумя невесомыми стержнями *1* и *2* (рис. С2.8, С2.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

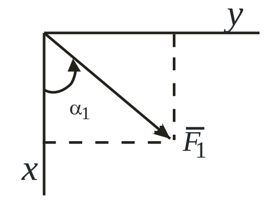
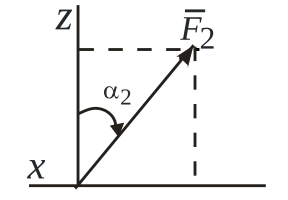
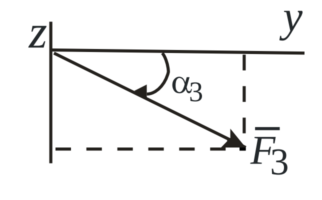
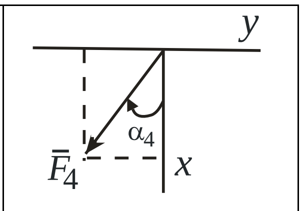
Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты P_1 = 5 кН, вес меньшей плиты P_2 = 3 кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость *xy* – горизонтальная).

На плиты действует пара сил с моментом *M* = 4 кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С2; при этом силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости *xy*, сила $\overline{F}_2$ – в плоскости, параллельной *xz*, и сила $\overline{F}_3$ – в плоскости, параллельной *yz*. Точки приложения сил (*D, E, H, K*) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках *A* и *B* и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять *a* = 0,6 м.

Указания. Задача С2 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\overline{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x\left(\overline{F}\right) = m_x\left(\overline{F}'\right) + m_x\left(\overline{F}''\right)$ и т.д. x y

Таблица С2

Силы								
	$F_1 = 6$ кН		$F_2 = 8$ кН		$F_3 = 10$ кН		$F_4 = 12$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
0	E	60	H	30	-	-	-	-
1	-	-	D	60	E	30	-	-
2	-	-	-	-	K	60	E	30
3	K	30	-	-	D	0	-	-
4	-	-	E	30	-	-	D	60
5	H	0	K	60	-	-	-	-
6	-	-	H	90	D	30	-	-
7	-	-	-	-	H	60	K	90
8	D	30	-		K	0	-	-
9	-	-	D	90	-	-	H	30

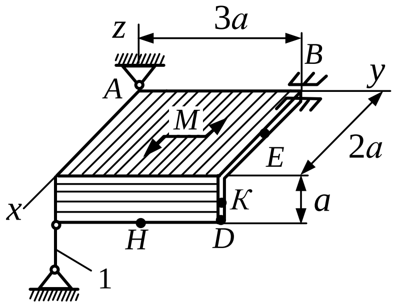


Рис. С2.0

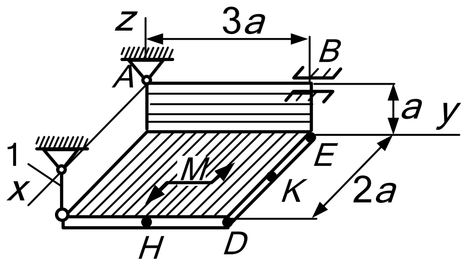


Рис. С2.1

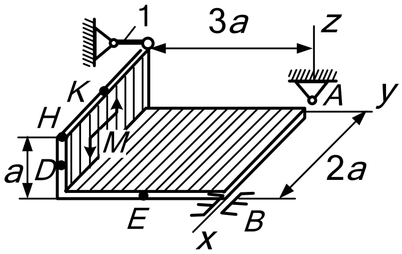


Рис. С2.2

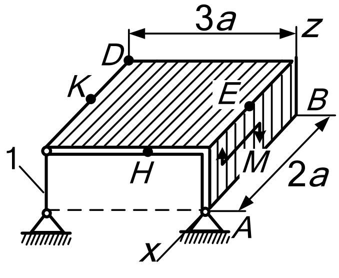


Рис. С2.3

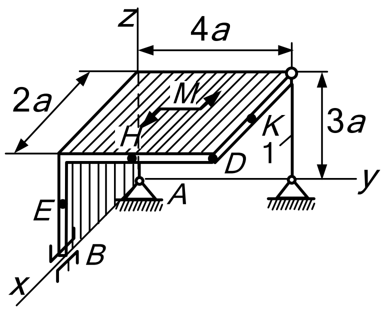


Рис. С2.4

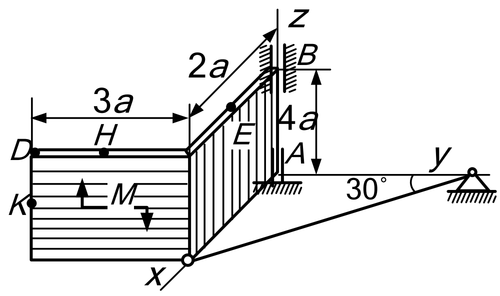


Рис. С2.5

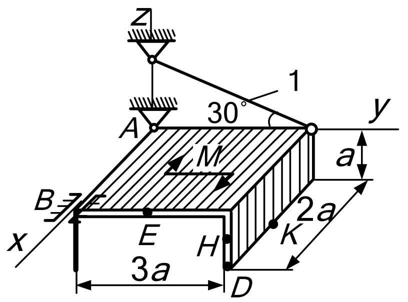


Рис. С2.6

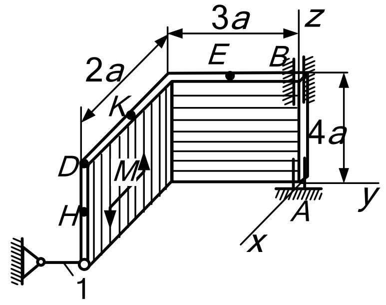


Рис. С2.7

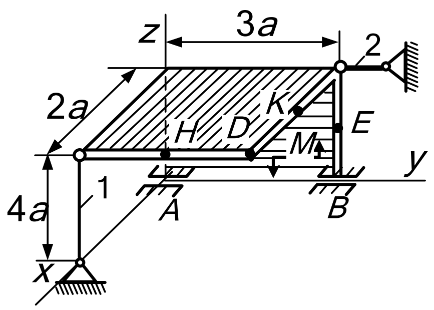


Рис. С2.8

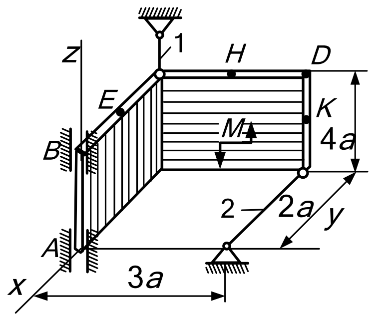


Рис. С2.9

Пример С2а. Горизонтальная прямоугольная плита весом *P* (рис. С2 а) закреплена сферическим шарниром в точке *A*, цилиндрическим (подшипником) в точке *B* и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной *xz*, действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной *yz*, – пара сил с моментом *M*.

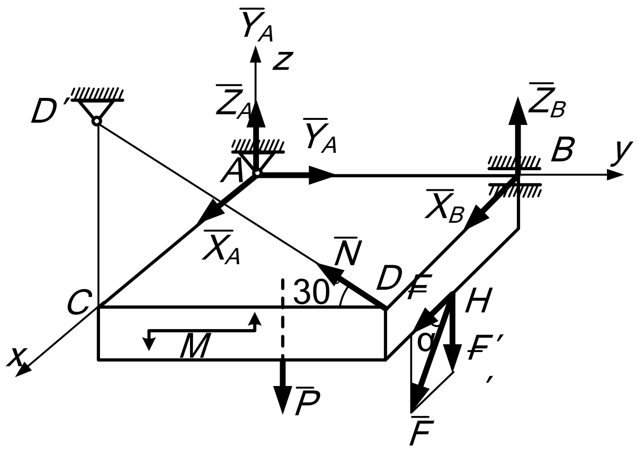


Рис. С2а

Дано: $P = 3$ кН; $F = 8$ кН; $M = 4$ кН·м; $\alpha = 60°$, $AC = 0{,}8$ м; $AB = 1{,}2$ м; $BE = 0{,}4$ м; $EH = 0{,}4$ м.

Определить: реакции опор *A*, *B* и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\overline{P}$, $\overline{F}$ и пара с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\overline{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил (см. рис. С2а):

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + X_B + F\cos 60^\circ = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A - N\cos 30^\circ = 0; \qquad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0;\ Z_A + Z_B - P + \sin 30^\circ - F\sin 60^\circ = 0; \qquad (3)$$

$$\sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0,$$

$$M - P\cdot AB/2 + Z_B\cdot AB - F\sin 60^\circ\cdot AB + \mathrm{T}\sin 30^\circ\cdot AB = 0; \qquad (4)$$

$$\sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0,$$

$$P\cdot AC/2 - N\sin 30^\circ\cdot AC + F\sin 60^\circ\cdot AC/2 - F\cos 60^\circ\cdot BE = 0; \qquad (5)$$

$$\sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = 0,\ -F\cos 60^\circ\cdot AB - N\cos 30^\circ\cdot AC - X_B\cdot AB = 0. \qquad (6)$$

Для определения моментов силы $\overline{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные осям x и z ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. «Указания»). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\overline{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: X_A = 3,4 кН; Y_A = 5,1 кН; Z_A = 4,8 кН; X_B = – 7,4 кН; Z_B = 2,1 кН; N = 5,9 кН. Знак минус указывает, что реакция X_B направлена противоположно показанной на рис. С2а.

Пример С2б. Две прямоугольные плиты весом Р1 и Р2 (рис. С2 б) закреплены сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD'. На плиту в плоскости, параллельной xy, действуют силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, а в плоскости, параллельной xz, – пара сил с моментом M.

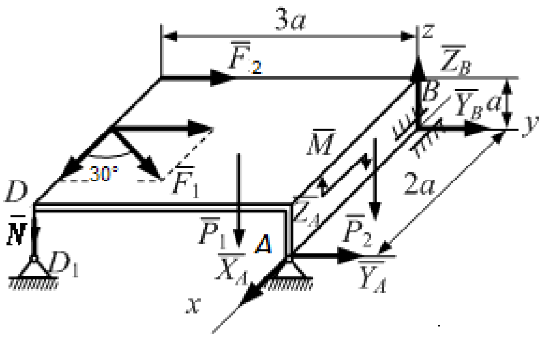


Рис. С2б

Дано: $P_1 = 5\ кН,\ P_2 = 3\ кН$, $F_1 = 6\ кН,\ F_3 = 10\ кН,$

$M = 4 кН \cdot м,\ \alpha = 30^0,\ a = 0{,}6\ м.$

Определить: реакции опор A, B и стержня DD'.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и пара с моментом M, а также реакции связей (рис. С2 б). Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\overline{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D', предполагая, что он растянут.

Силу $\overline{F}_1$ разложим на составляющие $F'_1 = F_1 \cos 30^0$, $F''_1 = F_1 \sin 30^0$ и для определения момента силы $\overline{F}_1$ относительно осей применим теорему Вариньона.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_A + F_1 \cos 30^\circ = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;\ Y_A + Y_B + F_1 \sin 30^\circ + F_2 = 0;$$
$$\sum F_{kz} = 0;\ Z_A + Z_B - N - P_1 - P_2 = 0;$$
$$\sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0;\ N \cdot 3a + P_1 \frac{3}{2} a - F_1 \sin 30^\circ \cdot a - F_3 \cdot a = 0;$$
$$\sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0;\ -M - Z_A \cdot 2a + N \cdot 2a + F_1 \cos 30^\circ \cdot a + \left(P_1 + P_2\right) a = 0;$$
$$\sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = 0;\ Y_A \cdot 2a + F_1 \sin 30^\circ \cdot a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

$$X_A = -F_1 \cos 60^\circ = -3\ кН;$$
$$Y_A = -\frac{F_1 \sin 60^\circ}{2} = -2.6\ кН;$$
$$N = \frac{F_1 \sin 60^\circ + F_3 - \frac{3}{2} P_1}{3} = 2.56\ кН;$$
$$Z_A = \frac{N \cdot 2a + F_1 \cos 60^\circ \cdot a + \left(P_1 + P_2\right) a - M}{2a} = 4.73\ кН;$$
$$Y_B = -Y_A - F_1 \sin 60^\circ - F_3 = -12.6\ кН;$$
$$Z_B = N - Z_A + P_1 + P_2 = 5.83\ кН.$$

Ответ: X_A = – 3 кН; Y_A = – 2,6 кН; Z_A = 4,73 кН; Y_B = – 12,6 кН; Z_B = 5,83 кН; N = 2,56 кН. Знак минус указывает, что реакции X_A, Y_A, Y_B направлены противоположно показанным на рис. С2 б.

Тест по разделу «Статика»

1. Что изучает статика:

а) способы преобразования систем сил в эквивалентные системы;

б) условия равновесия сил, приложенных к твердому телу;

в) то и другое?

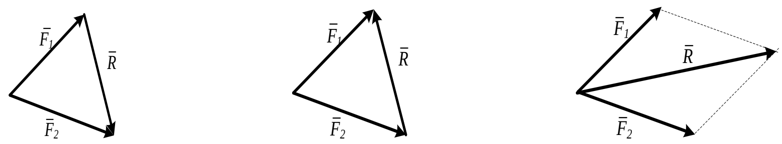
2. Система сходящихся сил – это совокупность сил, в которой:

а) линии действия сил совпадают;

б) линии действия сил пересекаются в одной точке;

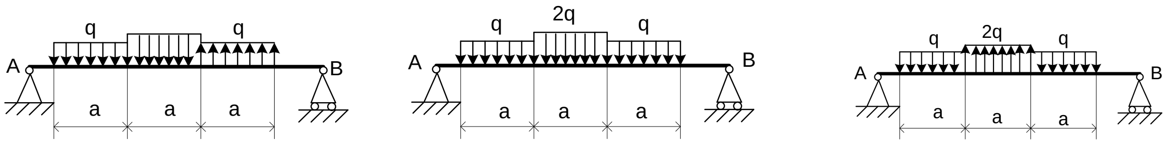
в) линии действия сил параллельны.

3. На какой схеме $\overline{R}$ является равнодействующей системы сходящихся сил?



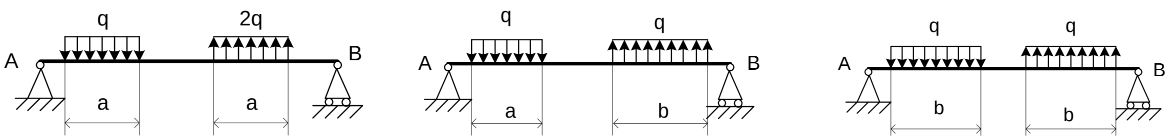
а) б) в)

4. На какой схеме система активных сил эквивалентна нулю?



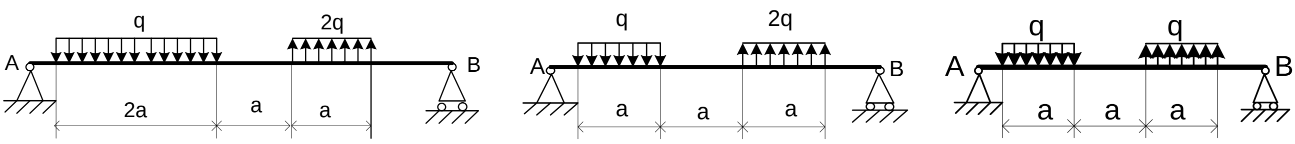
а) б) в)

5. На какой схеме система активных сил эквивалентна паре сил?



а) б) в)

6. На какой схеме система активных сил эквивалентна равнодействующей?



а) б) в)

7. Алгебраический момент силы относительно центра считается положительным, если он вызывает вращение:

а) по часовой стрелке;
б) против часовой стрелки;
в) то и другое.

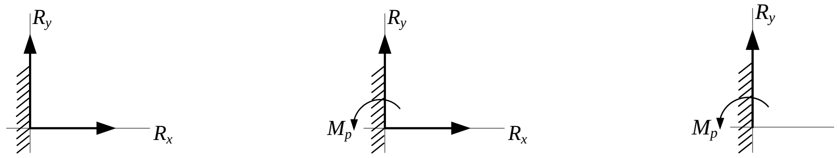
8. В каких видах опор возникает момент реакции:

а) в шарнирных опорах;

б) в стержневых опорах;

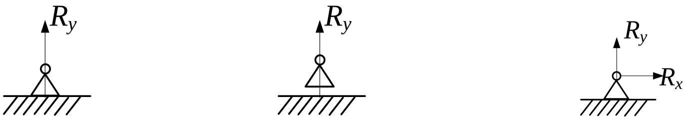
в) в заделках?

9. На какой схеме правильно изображены реакции жесткой заделки в случае нагружения произвольной плоской системой активных сил?



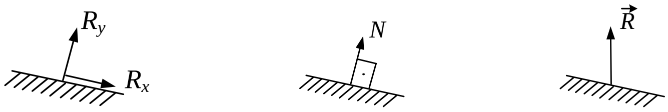
а) б) в)

10. Как изображается шарнирно-неподвижная опора и ее реакции в случае нагружения произвольной плоской системой внешних сил:



а) б) в)

11. На какой схеме правильно изображена реакция гладкой опорной плоскости?



а) б) в)

12. Аналитическими условиями равновесия произвольной плоской системы сил являются уравнения:

1) $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$; $\sum M_A(\overline{F}_k) = 0$;

2) $\sum F_{kx} = 0$; $\sum M_A(\overline{F}_k) = 0$; $\sum M_B(\overline{F}_k) = 0$;

3) $\sum M_A(\overline{F}_k) = 0$; $\sum M_B(\overline{F}_k) = 0$; $\sum M_C(\overline{F}_k) = 0$.

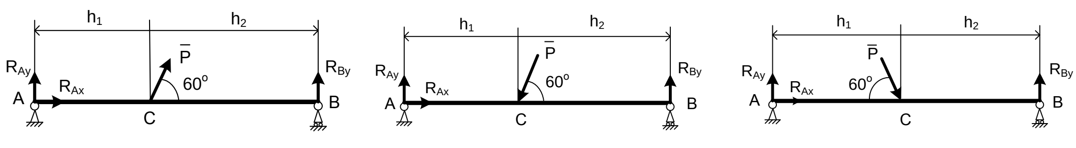
Ответ: а) 1; б) 2 и 3; в) все.

13. Для какой схемы составлены уравнения равновесия?

$R_{Ax} + P\cos 60^\circ = 0$;

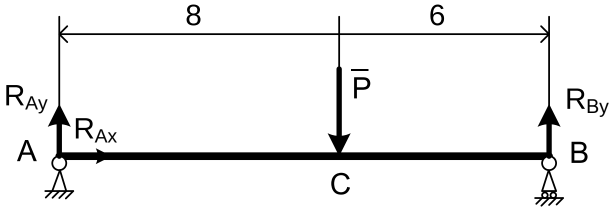
$R_{Ay} - P\sin 60^\circ + R_{By} = 0$;

$-R_{Ay} \cdot h_1 + R_{By} \cdot h_2 = 0$



а) б) в)

14. Какое уравнение моментов составлено относительно точки B?



а) $14R_{By} - 8P = 0$;

б) $6P - 14R_{Ay} = 0$;

в) $6R_{By} - 8R_{Ay} = 0$?

15. Что будет происходить с абсолютно твердым телом, находящимся под действием некоторой системы сил, если главный вектор и главный момент этой системы сил не равны нулю, а направления векторов совпадают?

а) перемещение в направлении главного вектора;

б) вращение в плоскости действия главного момента;

в) винтовое движение.

Список литературы

1. Смогунов В.В. Теоретическая механика для заочников / Под ред. Н.И. Гордиенко. – Пенза: изд-во ПензГУ, 1995.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для студ. втузов (гриф МО). – 12-е изд., стереотип. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.

3. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1987 г.

4. Теоретическая механика: Методические указания / Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1988.

5. Теоретическая механика: Методические указания / Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1989.

Справочные данные

Таблица П.1

Основные законы кинематики

1. Кинематика точки

1) векторный способ задания движения: $\bar{r} = \bar{r}(t)$; $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$; $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$;

2) координатный способ: $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$;

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

3) естественный способ: $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}, v = \dfrac{ds}{dt}$, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; $a_\tau = \ddot{s}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

2. Вращательное движение а.т.т.:

$\varphi = f(t)$ - рад. $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$; $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$;

$v = h\omega$; $a_\tau = h\varepsilon$; $a_n = h\omega^2$; $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

3. Плоскопараллельное движение а.т.т.:

$v_{MA} = v_A + v_{MA} > v_{MA} = \omega \cdot MA$;

$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$ - теорема о проекциях скоростей твердого тела;

МЦС: $v_A = \omega \cdot PA$, $v_B = \omega \cdot PB$, $\dfrac{v_A}{PA} = \dfrac{v_B}{PB}$;

$a_{MA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$, $\bar{a}_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

4. Сложное движение а.т.т.: $\bar{v}_a = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$

$$v_a = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{отн} \cdot v_{пер} \cdot \cos\alpha}$$

Теорема Кориолиса: $\bar{a}_a = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$;

$a_{кор} = 2|\omega_{пер} \cdot v_{отн}|\sin\alpha$.

Таблица П.2

Производные от функций

y	y'	y	y'
$const$	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$u \pm v$	$u' \pm v'$
x^a	$ax^{a-1} = a\frac{y}{x}$	Cu	Cu'
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$u \cdot v$	$uv' \pm vu'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$
e^x	e^x	$y = f(u)$ $u = \varphi(x)$	$y' = y'_u \cdot u'_x =$ $= f'(u) \cdot \varphi'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = \varphi(x) \end{matrix}\right\}$	$y'x = \frac{1}{x'y}$ $f'x = \frac{1}{\varphi'(y)}$, где f и φ взаимно обратные функции
$\lg x$	$\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}43}{x}$		
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$	$arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$arc\,tgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$arc\,ctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$Ar\,shx$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
shx	chx	$Ar\,chx$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
chx	shx	$Ar\,thx$	$\frac{1}{1-x^2}$
thx	$\frac{1}{ch^2 x}$	$Ar\,cthx$	$-\frac{1}{x^2-1}$
thx	$-\frac{1}{sh^2 x}$		

Таблица П.3

Значения тригонометрических функций основных углов

Функ-ция	1-квадрант					2-квадрант			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
ctg	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Продолжение табл. П.3

Функ-ция	3-квадрант				4-квадрант			
	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\sqrt{3}$	0

Таблица П.4

Формулы приведения

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2(1-\cos\alpha)};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2(1+\cos\alpha)};$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = 1/2\,[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = 1/2\,[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = 1/2\,[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];$$

$$\sin^2\alpha = 1/2\,(1-\cos 2\alpha);$$

$$\cos^2\alpha = 1/2\,(1+\cos 2\alpha);$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = -(1-2\cos^2\alpha)$$

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионельного образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие для заочников

В двух книгах

Книга 2

Динамика

ПЕНЗА 2013

УДК 531. 07
Т33

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Строительная и теоретическая механика»
Пензенского государственного университета архитектуры и строительства»
А. И. Шеин

доктор технических наук,
профессор кафедры «Основы конструирования механизмов и машин»
Пензенской государственной сельскохозяйственной академии
В. А. Мачнев

Авторы:
В. В.Смогунов, О. А. Вдовикина,
Н. Ю. Митрохина, А. В. Кузьмин

Теоретическая механика : учеб. пособие для заочников : в 2 кн. / под общ. ред. Смогунова В. В. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – Кн. 2. Динамика. – 96 с.

Представлены теоретический материал, контрольные задания и примеры решения задач по разделам динамика: динамики точки, динамики механической системы, динамики твердого тела. Особое внимание уделено рассмотрению типовых примеров; приведены подробные алгоритмы их решений. В приложении даны справочные материалы.

Учебное пособие составлено на основе сборников задач С. М. Тарга с учетом опыта преподавания курса «Теоретическая механика» в Пензенском государственном университете согласно государственным образовательным стандартам.

Пособие подготовлено на кафедре «Теоретическая и прикладная механика» ПГУ и предназначено для студентов машиностроительных, приборостроительных специальностей и специальностей сервиса оборудования, изучающих теоретическую механику.

УДК 531. 07

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММА КУРСА «ДИНАМИКА»

Предмет динамики. Законы механики Галилея-Ньютона. Задачи динамики. Свободные прямолинейные колебания материальной точки. Механическая система. Масса системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Количество движения материальной точки и механической системы. Момент количества движения материальной точки. Дифференциальные уравнения поступательного и вращательного движения твердого тела. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Связи и их уравнения. Принцип возможных перемещений. Обобщенные координаты системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, уравнения Лагранжа второго рода.

Контрольные задания

Содержание заданий и порядок выполнения

Студенты выполняют одно контрольное задание (работу).

Задание включает задачи Д1–Д8.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. Д1.4 — это рис. 4 к задаче Д1 и т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице — по последней: например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условие № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи*: на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате, в целом ряде задач, чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно.* Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) *и подробно излагать весь ход расчетов.* На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. На рисунках к задачам Д1–Д8 считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Если тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела *1*; P_2, l_2, r_2 — тела *2* и т. д. Аналогично, в кинематике и динамике v_B, a_B означают скорость и ускорение точки *B*; v_C, a_C — точки *C*; ω_1, ε_1 — угловую скорость и угловое ускорение тела *1*; ω_2, ε_2 — тела *2* и т. д. Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении некоторых вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся *к вашему варианту,* т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Необходимые справочные данные приведены в приложении.

Динамика точки

Предмет динамики — изучение движения абсолютно твердых тел под действием сил.

Основные понятия и определения:

масса — величина, зависящая от количества вещества данного тела и определяющая меру его инертности;

материальная точка — материальное тело, имеющее массу, размерами которого при изучении его движения можно пренебречь;

силы в динамике — *переменные*, зависящие от времени, от положения точки, от ее скорости.

Законы классической механики (Галилея-Ньютона)

1. Закон инерции (Галилей, 1638г.): Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Инерциальная система отсчета — система, по отношению к которой выполняется закон инерции.

2. Основной закон динамики: ускорение материальной точки пропорционально приложенной силе и имеет одинаковое с вектором силы направление:

$$m\vec{a} = \vec{F}\ .$$

3. Закон равенства действия и противодействия: две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.

4. Закон суперпозиции: несколько одновременно действующих на точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы их равнодействующая:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k\ .$$

Задачи динамики точки

1) по заданному закону движения определить силы, действующие на точку (***прямая задача***);

2) по заданным силам, действующим на точку, определить закон ее движения (***обратная задача***).

Дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах:

$$m\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t);$$
$$m\ddot{y} = F_y(...);$$
$$m\ddot{z} = F_z(...).$$

Уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = F_\tau,$$
$$\frac{m}{\rho}(\frac{dS}{dt})^2 = F_n,$$
$$0 = F_b.$$

Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k + \vec{N}.$$

Решение *прямой задачи* динамики: при заданном законе движения сила определяется путем дифференцирования закона движения и подстановки его в дифференциальные уравнения движения.

Решение *обратной задачи* динамики требует задания начальных условий, т.е. положения и скорости точки в начальный момент времени:

$$t = 0,\ x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \dot{x} = \dot{x}_0,\ \dot{y} = \dot{y}_0,\ \dot{z} = \dot{z}_0.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений движения дает общее решение:

$$x = x(t, C_1, C_2, ..., C_6),\ y = y(t, C_1, ..., C_6),\ z = z(t, C_1, ..., C_6);$$

где $C_1, ..., C_6$ — произвольные постоянные интегрирования.

Дифференцирование по времени общего решения и выполнение начальных условий дают шесть уравнений для определения шести постоянных интегрирования:

$$x_0 = x(0, C_1, ..., C_6),\ \dot{x}_0 = \dot{x}(0, C_1, ..., C_6);$$
$$y_0 = y(0, C_1, ..., C_6),\ \dot{y}_0 = \dot{y}(0, C_1, ..., C_6);$$
$$z_0 = z(0, C_1, ..., C_6),\ \dot{z}_0 = \dot{z}(0, C_1, ..., C_6).$$

Решение этих уравнений дает:

$$C_i = f_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$

где i=1,..., 6.

При подстановке найденных значений C_i в общее решение найдем решение задачи для данных начальных условий:

$$x = \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$
$$y = \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$
$$z = \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки:

1. Определить закон движения точки массой m под действием силы тяжести, сопротивлением атмосферы пренебречь.

Решение.

Дифференциальные уравнения движения записываются в виде:

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = -mg,\ m\ddot{z} = 0,$$

общее решение:

$$x = C_1 t + C_4,$$
$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_2 t + C_5.$$
$$z = C_3 t + C_{6.}$$

Для определения C_i ввести начальные условия:

$$t = 0,\quad x_0 = y_0 = z_0 = 0,\quad \dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha,\quad \dot{y}_0 = v_0 \sin\alpha,\quad \dot{z}_0 = 0$$

и продифференцировать общее решение $\dot{x} = C_1, \dot{y} = -gt + C_2, \dot{z} = C_3$, откуда:

$$C_4 = 0,\ C_5 = C_3 = C_6 = 0,\ C_1 = v_0 \cos\alpha,\ C_2 = v_0 \sin\alpha.$$

Подставить в общее решение $x = v_0 t \cos\alpha,\ y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},\ z = 0,$ т.е. траекторией точки будет парабола $y = x \cdot tg\alpha - \frac{x^2 g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}$.

2. Определить закон прямолинейного движения точки под действием силы, зависящей от времени.

Решение.

$$m\ddot{x} = F_X(x), \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m} F_X(t), \dot{x} = \frac{1}{m}\int F_X(t)dt + C_1,$$

$$x = \frac{1}{m}\int\left[\int F_X(t)dt\right]dt + C_1 t + C_2.$$

3. Определить закон прямолинейного движения точки под действием силы, зависящей от положения точки.

Решение.

$$m\ddot{x} = F_x(x),\ \ \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

$$v \cdot dv = \frac{1}{m}F_x(x)dx, v^2 = \frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1,$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\int F_x \cdot dx + C_1},\ \ \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x \cdot dx + C_1},\ dt = \pm\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x \cdot dx + C_1}},$$

$$t = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}} + C_2,\ \ \Phi(x, C_1, C_2) = \pm\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}} + C_2,$$

$$t = \Phi(x, C_1, C_2),\ \ x = \varphi(t, C_{1,}, C_2).$$

4. Определить закон прямолинейного движения точки под действием силы, зависящей от скорости.

Решение.

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}),\ \ v = \dot{x}, \frac{dv}{F_x(v)} = \frac{1}{m}dt,\ \int\frac{dv}{F_x(v)} + C_1 = \frac{1}{m}t.$$

$$\Phi(v, C_1) = m\left[\int\frac{dv}{F_x(v)} + C_1\right],\ \ t = \Phi(v, C_1),\ \ \frac{dx}{dt} = f(t, C_1),$$

$$x = \int f(t, C_1)dt + C_2,\ \ \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v,\qquad \frac{mv \cdot dv}{F_x(v)} = dx,$$

$$x = m\int\frac{v \cdot dv}{F_x(v)} + C_1';\ \frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1');\ \ t = \int\frac{dx}{\varphi(x, C_1')} + C_2'; \to x = f(t).$$

Несвободное движение материальной точки

Несвободное движение материальной точки — это движение по заданной неподвижной поверхности или кривой под действием активных сил и наложенных связей.

Дифференциальные уравнения движения точки по заданной гладкой неподвижной кривой:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = \sum F^a_{k\tau} + N_\tau, \qquad (1)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F^a_{kn} + N_n, \; 0 = \sum F^a_{kb} + N_b. \qquad (2)$$

Определение закона движения и реакции связи осуществляются по уравнениям (1) и (2).

Относительное движение материальной точки

Относительное движение материальной точки — это движение по отношению к неинерциальным, произвольно движущимся системам отсчета.

Дифференциальные уравнения относительного движения точки:

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{F}^{\text{и}}_e + \sum \vec{F}^{\text{и}}_{\text{к}},$$

где $\vec{F}^{\text{и}}_e = -m\vec{a}_e$ — переносная сила инерции; $\overline{F}^{\text{и}}_{\text{к}} = -m\overline{a}_{\text{к}}$ — кориолисова сила инерции.

Прямолинейные колебания точки

Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний $F_x = -cx$ описываются уравнениями:

$$m\ddot{x} = -cx,$$

$$\ddot{x} + k^2x = 0,$$

$$k^2 = \frac{c}{m}.$$

Характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения:

$$\alpha^2 + k^2 = 0,$$

его корни $\alpha_1 = ki,\; \alpha_2 = -ki$ — чисто мнимые числа. Общим решением дифференциального уравнения являются $x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$ где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, вводятся новые постоянные интегрирования:

A — амплитуда колебаний, ε — начальная фаза колебаний,

тогда $C_1 = A\cos\varepsilon,\; C_2 = A\sin\varepsilon,\; x = A\cos\varepsilon \cdot \sin kt + A\sin\varepsilon \cdot \cos kt$,

$x = A\sin(kt + \varepsilon)$, где k — частота, $\frac{2\pi}{k} = T$ — период колебаний.

Затухающие колебания точки при сопротивлении, пропорциональном скорости описываются в виде

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x},\ \ \ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2 x = 0,\ \ 2h = \frac{b}{m},\ \ k^2 = \frac{c}{m}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^2 + 2h\alpha + k^2 = 0,$$

его корни

$$\alpha_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Период затухающих колебаний: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}$, декремент колебаний: e^{-hT}.

Апериодическое движение возникает при $h \geq k$, когда $x = e^{-ht}\left[x_0 + (\dot{x}_0 + hx_0)t\right]$, в отличие от случая малого сопротивления $h < k$, $x = ae^{-ht}\sin\left(\sqrt{k^2 - h^2}\,t + \varepsilon\right)$, когда затухающее движение носит колебательный характер.

Вынужденные колебания при действии гармонической возмущающей силы и силы сопротивления, пропорциональной скорости описываются уравнениями:

$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + h\sin(pt + \delta), \qquad \ddot{x} + h\dot{x} + k^2 x = H_0 \sin(pt + \delta).$$

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме двух решений: общего решения однородного уравнения x_1 и частного решения x_2 неоднородного уравнения:

$$x_1 = e^{-ht}\left(C_1 \sin k't + C_2 \cos k't\right),$$
$$x_2 = A\sin(pt + \nu).$$

$$A = \frac{H_0}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4h^2 p^2}}, \qquad tg(\delta - \nu) = \frac{2hp}{k^2 - p^2},$$

$$\mu = \frac{a}{x_{\text{ст}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{p^2}{k^2}\right)^2 + 4\dfrac{h^2}{k^2}\dfrac{p^2}{k^2}}}, \qquad x_{\text{ст}} = \frac{H}{c};$$

$$x = e^{-ht}\left[\frac{\dot{x}_0 + hx_0}{k'}\sin k't + x_0 \cos k't\right] -$$

$$- e^{-ht}\left\{\frac{A}{k'}\left[h\sin(\delta + \nu') + p\cos(\delta + \nu')\right]\sin k't + A\sin(\delta + \nu)\cos k't\right\} + A\sin(pt + \delta + \nu').$$

Динамика механической системы

Введение в динамику механической системы

Механическая система — это совокупность точек или тел, движения которых взаимосвязаны. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей либо силы внешние и внутренние.

Внешние силы $\left(\overline{F}_k^e\right)$ — силы, действующие на точки данной системы со стороны других тел, не входящих в эту систему.

Внутренние силы $\left(\overline{F}_k^i\right)$ — силы, с которыми точки данной системы действуют друг на друга.

Свойства внутренних сил:

1) геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равен нулю $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i = 0$;

2) сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равен нулю $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{M}_A\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n}M_x\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$.

Дифференциальные уравнения движения механической системы имеют вид

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i; \quad m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i; \quad m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i.$$

Масса системы $M = \sum m_k$.

Центром масс механической системы называется точка, радиус-вектор которой определяется выражением:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum m_k\vec{r}_k.$$

Координаты центра масс

$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k; \; y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k; \; z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k.$$

Теорема о движении центра масс механической системы: *центр масс системы движется как точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему*:

$$M\overline{a}_C = \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e, \qquad \sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i = 0.$$

Закон сохранения движения центра масс: *если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы находится в состоянии покоя или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью.*

Момент инерции абсолютно твердого тела относительно оси — это скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от оси вращения: $I_z = \sum m_k h_k^2$, радиус инерции: $\rho^2 = \dfrac{I}{M}$.

Примеры вычисления моментов инерции тел относительно оси, проходящей через центр масс:

1) тонкий однородный стержень длины *l* и массы *M* $\qquad I_C = \dfrac{1}{12} Ml^2$;

2) тонкое круглое кольцо, полый цилиндр $\qquad I_C = MR^2$;

3) круглый длинный сплошной цилиндр $\qquad I_C = \dfrac{1}{2} MR^2$.

Теорема Гюйгенса: *момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции тела относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями:*

$$I_{Oz} = I_{Cz} + Md^2.$$

Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления

$$I = I_l + Md^2,\ I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma.$$

Моменты инерции тела относительно плоскости, полюса

$$I_{xOy} = \sum m_k z_k^2, \qquad I_0 = \sum m_k r_k^2.$$

Центробежные моменты инерции определяются по формулам:

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k,$$

$$I_{yz} = \sum m_k y_k z_k,$$

$$I_{zx} = \sum m_k z_k x_k.$$

Главные оси инерции и главные центральные оси инерции:

1) Главной осью инерции тела называется ось, для которой центробежные моменты инерции I_{xz}, I_{yz}, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю.

2) Главными центральными осями инерции тела называются главные оси инерции, построенные для центра масс тела.

Оси инерции обладают следующими свойствами:

1) Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки.

2) Если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O, в которой ось пересекает плоскость.

3) Через любую точку какого-либо тела можно провести, по крайней мере, три такие взаимно перпендикулярные оси, которые будут главными осями инерции для этой точки.

Общие теоремы динамики

Теорема об изменении количества движения

Количество движения материальной точки — векторная величина $m\vec{v}$, равная произведению массы точки на вектор ее скорости.

Элементарный импульс силы — векторная величина, равная произведению вектора силы на элементарный промежуток времени $d\vec{s} = \vec{F}dt.$

Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси:

$$\vec{s} = \int_0^{t_1} \vec{F}dt, \quad s_x = \int_0^{t_1} F_x dt, s_y = \int_0^{t_1} F_y dt, s_z = \int_0^{t_1} F_z dt.$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил:*

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_k.$$

В конечной форме: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum \vec{s}_k, \quad mv_{1x} - mv_{0x} = \sum s_{kx}.$$

Количество движения механической системы — векторная величина, равная геометрической сумме (главному вектору) количества движения всех точек системы $\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k$ или $\vec{Q} = M\vec{v}_C$.

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической суме всех действующих на систему внешних сил:*

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e, \quad \frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e.$$

В конечной форме: изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e.$$

Закон сохранения количества движения механической системы:

1) если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения будет постоянен по модулю и направлению;

2) если сумма проекций всех внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось есть величина постоянная.

Теорема об изменении момента количества движения

Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси: $\bar{M}_0(m\bar{v}),\ M_z(m\bar{v})$. *Его алгебраическое значение* $\left|\bar{M}_0(m\bar{v})\right| = mv \cdot h$

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки: *производная по времени от момента количества движения точки относительно центра (оси) равна моменту силы, действующей на точку относительно центра (оси):*

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{M}_0(m\bar{v})\right] = \bar{M}_0(\vec{F}); \quad \frac{d}{dt}\left[M_z(m\bar{v})\right] = M_z(\vec{F}).$$

Главный момент количества движения или кинетический момент системы относительно центра — величина $\bar{K}_0$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{M}_0(m_k \bar{v}_k) \text{ и оси: } K_x = \sum M_x(m_k \bar{v}_k).$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела

$$K_z = I_z \omega.$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы: *производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра (оси), равна сумме моментов внешних сил системы относительно того же центра (оси)* — выражается формулой

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right), \quad \frac{dK_x}{dt} = \sum M_x\left(\overline{F}_k^e\right).$$

Закон сохранения кинетического момента механической системы: если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил равна нулю, то кинетический момент системы будет величиной постоянной.

Теорему об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении системы относительно центра масс: *движение системы относительно ее центра масс происходит так же, как если бы последний был неподвижен* — можновыразить как

$$\frac{d\overline{K}_C}{dt} = \sum \overline{M}_C\left(\overline{F}_k^e\right).$$

Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическая энергия точки:

$$\mathrm{T} = \frac{mv^2}{2}.$$

Аналитическое выражение элементарной работы имеет вид:

$$dA = Fds\cos\alpha, \quad dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

Работа силы на конечном перемещении можно представить в виде

$$A(M_0M_1) = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right).$$

Для вычисления работы надо знать закон движения точки приложения силы, т.е. решить основную задачу динамики:

работа силы тяжести $A(M_0M_1) = \pm Ph;$

работа силы упругости $A(M_0M_1) = \frac{c}{2}\left[(\Delta l_{\text{нач}})^2 - (\Delta l_{\text{кон}})^2\right];$

работа силы трения $A(M_0M_1) = -\int\limits_{M_0}^{M_1} fNds.$

Теорема об изменении кинетической энергии точки:

в дифференциальной форме

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k\,;$$

в конечной форме: *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении:*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A(M_0 M_1)\,.$$

Кинетическая энергия механической системы

$$\mathrm{T} = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела выражаются в зависимости от движения тела:

1) при поступательном движении $\quad \mathrm{T} = \dfrac{1}{2} M v_C^2;$

2) при вращении вокруг неподвижной оси $\quad \mathrm{T} = \dfrac{I_z \omega^2}{2};$

3) в общем случае движения $\quad \mathrm{T} = \dfrac{1}{2} M v_C^2 + \dfrac{1}{2} I_{Cp} \omega^2;$

4) при плоскопараллельном движении $\quad \mathrm{T} = \dfrac{1}{2} M v_C^2 + \dfrac{1}{2} I_C \omega^2.$

Теорема об изменении кинетической энергии системы

в дифференциальной форме имеет вид

$$d\mathrm{T} = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i\,;$$

в конечной форме: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил* —

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле дает

$$d\mathrm{T} = \sum dA_k^e.$$

Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси выражается в виде

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z\, d\varphi, \qquad W = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z\, d\varphi}{dt} = M_z \omega\,.$$

Понятие о силовом поле

Силовое поле — это часть пространства, в каждой точке которого на помещенную частицу действует сила, зависящая от положения частицы. Если некоторая функция дает возможность определить значение силы в каждой точке силового поля, то эта функция является *силовой функцией* $U = U(x, y, z)$. Силовое поле, для которого существует силовая функция, называется *потенциальным* и выражается как

$$dU(x,y,z)=dA, \qquad Fx\,dx + Fy\,dy + Fz\,dz = dU(x,y,z).$$

Выражение проекций силы через силовую функцию имеет вид:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле от вида траектории движения точки не зависит и равна:

$$A(M_1 M_2) = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU(x, y, z) = U_2 - U_1 .$$

Потенциальная энергия — скалярная величина, равная той работе, которую произведут силы поля при перемещении точки из положения М в нулевое $\Pi = A(MO)$. Потенциальная энергия в любой точке силового поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком:

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z).$$

Примеры силовых функций потенциальных силовых полей:

1) однородное поле тяжести $U = -Pz$;

2) поле тяготения $U = mgR^2/r$;

3) поле упругих сил $U = -cx^2/2$.

Закон сохранения механической энергии: *при движении под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий системы в каждом ее положении остается величиной постоянной* — выражается в виде

$$T1 + \Pi1 = T0 + \Pi0 = \text{const}.$$

Динамика твердого тела

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид

$$m\ddot{x}_C = F_x^e, \qquad m\ddot{y}_C = F_y^e, \qquad m\ddot{z}_C = F_z^e.$$

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I_z\ddot{\varphi} = M_z^e.$$

Дифференциальные уравнения плоского движения тела:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad I_C\ddot{\varphi} = \sum M_C\left(\bar{F}_k^e\right).$$

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера для материальной точки: *если в любой момент времени к фактически действующим на точку силам прибавить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной:*

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^{и} = 0, \quad \bar{F}_k^{и} = -m_k\bar{a}_k \text{ (даламберова сила инерции).}$$

Принцип Даламбера для механической системы —

$$m_1\bar{a}_1 = \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i + \bar{F}_1^{и}, \ldots, m_n\bar{a}_n = \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i + \bar{F}_n^{и}.$$

Приведение сил инерции точек абсолютно твердого тела к центру:

при поступательном движении — к главному вектору;

при вращательном движении — к главному моменту;

при плоскопараллельном движении — к главному вектору и главному моменту.

Принцип Даламбера для механической системы выражаетися в виде

$$\sum\left(\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^{и}\right) = 0, \qquad \sum\left[\bar{M}_O\left(\bar{F}_k^e\right) + \bar{M}_O\left(\bar{F}_k^i\right) + \bar{M}_O\left(\bar{F}_k^{и}\right)\right] = 0.$$

Главный вектор и главный момент сил инерции имеет вид

$$\bar{R}^{и} = \sum\bar{F}_k^{и}, \qquad \bar{M}_O^{и} = \sum\bar{M}_O\left(\bar{F}_k^{и}\right).$$

Определение динамических реакций подшипников при вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси: *ко всем точкам системы добавляют силы инерции и составляют уравнения равновесия системы активных сил, реакций связей и сил инерции,* реакции имеют вид

$$\sum\bar{F}_k^a + \sum\bar{F}_k^r + \sum\bar{F}_k^{ин} = 0;$$

$$\sum\bar{M}_O\left(\bar{F}_k^a\right) + \sum\bar{M}_O\left(\bar{F}_k^r\right) + \sum\bar{M}_O\left(\bar{F}_k^{ин}\right) = 0.$$

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

Связи, налагаемые на механическую систему — это ограничения, налагаемые на положения и скорости точек системы, могут быть записаны в виде уравнений и неравенств. Связи называются голономными, если их уравнения записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени. Нестационарными называются связи, содержащие в уравнении связи время. Удерживающие связи описываются уравнениями, неудерживающие связи — неравенствами.

Для одной точки уравнение связи может быть представлено в виде

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, ..., t) = 0.$$

Для механической системы, состоящей из n точек, может быть составлен l уравнений связи:

$$f_s(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, ..., t) = 0, \quad s = 1,2,...,l; \;\; k = 1,...,n \text{ или меньше.}$$

Возможные (виртуальные) перемещения δs *точки и системы* — любая совокупность бесконечно малых перемещений точек, допускаемых в данный момент времени наложенными связями. *Число степеней свободы* равно числу независимых между собой возможных перемещений системы. У свободной точки имеется 3 степени свободы (3 независимых перемещения вдоль осей). Свободное абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы (3 поступательных перемещений вдоль осей и 3 вращательных вокруг этих осей).

Идеальные связи — все связи в абсолютно твердом теле, закрепленные точки, гибкие нерастяжимые нити, абсолютно гладкие поверхности. Сумма элементарных работ реакций этих связей при любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum \delta A_k^r = 0.$$

Принцип возможных перемещений: Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю:

$$\sum \delta A_k^a = 0, \quad \sum \left(F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k \right) = 0.$$

Принцип Даламбера–Лагранжа: *при движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю:*

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^и = 0\,;$$

$$\sum\left[\left(F_{kx}^a + F_{kx}^и\right)\delta x_k + \left(F_{ky}^a + F_{ky}^и\right)\delta y_k + \left(F_{kz}^a + F_{kz}^и\right)\delta z_k\right] = 0.$$

Общее уравнение динамики: *при движении системы с любыми связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил, всех реакций связи и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю:*

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r + \sum \delta A_k^и = 0\,.$$

Уравнения Лагранжа

Обобщенные координаты системы — это независимые между собой параметры q любой размерности, однозначно определяющие положение системы, число которых равно числу степеней свободы: $q_1, ..., q_s$.

Кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах:

$$q1 = f1(t),\quad q2 = f2(t), \ldots ,qs= fs(t),$$

обобщенные скорости $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s$, здесь $\dot{q}$ – линейная, угловая, секторная скорость.

Выражение элементарной работы в обобщенных координатах:

$$\delta A = Q\delta q,\quad Q = \sum \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}}{\partial q}, \qquad \sum \delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s\,.$$

Обобщенные силы и их вычисление. Коэффициенты при приращениях обобщенных координат имеют размерность работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты; вычисление обобщенных сил сводится к вычислению возможной элементарной работы.

Условия равновесия системы в обобщенных координатах:

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0, \ldots, Q_s = 0.$$

Дифференциальные уравнения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа 2-го рода):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \ldots,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s\,,$$

где $T = \sum \dfrac{m_k v_k^2}{2}$.

Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0,\ldots,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0,$$

где $L = \mathrm{T} - \Pi$ функция Лагранжа (Π — потенциальная энергия).

Понятие об устойчивости равновесия выражается теоремой Лагранжа-Дирихле: *если в положении равновесия консервативной системы с идеальными и стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Малые свободные колебания механической системы с одной степенью свободы около устойчивого положения системы и их свойства

Кинетическая энергия системы $T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2$, где a — обобщенный коэффициент инерции.

Потенциальная энергия системы $\Pi=\frac{1}{2}cq^2$, где c — приведенный коэффициент жесткости. Для консервативной системы $Q=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}$.

Тогда уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}$ с учетом a = const, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=a\dot{q}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)=a\ddot{q}$, $\frac{\partial T}{\partial q}=0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial q}=cq$ принимает вид: $a\ddot{q}=-cq$ или $\ddot{q}+k^2q=0$, где $k^2=\frac{c}{a}$.

Его общее решение: $q=C_1\cos kt+C_2\sin kt$, или $q=A\sin(kt+\varepsilon)$, произвольные постоянные C_1, C_2, A, ε определяются из начальных условий, круговая частота $k=\sqrt{\frac{c}{a}}$, период незатухающих колебаний $T=2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}$.

Свойства консервативной системы: *вблизи положения устойчивого равновесия консервативная система с одной степенью свободы совершает незатухающие гармонические колебания.*

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

Задача Д1

Груз *D* массой *m*, получил в точке *A* начальную скорость v_0, движется в изогнутой трубе *ABC*, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0–Д1.9, табл. Д1).

На участке *AB* на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунке) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости $\bar{v}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубку на участке *AB* пренебречь.

В точке *B* груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок *BC* трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу *f* = 0,2) и переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x на ось *x* задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние *AB* = *l* или время t_1 движения груза от точки *A* до точки *B*, найти закон движения груза на участке *BC*, т.е.

$$x = f(t),$$

где x = BD.

Указания. Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить уравнение движения точки (груза) на участке *AB*, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке *AB* или длину этого участка, определить скорость груза в точке *B*. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке *BC*. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке *BC* тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке *B*, и полагая в этот момент *t* = 0. При интегрировании уравнения движения на участке *AB* в случае, когда задана длина *l* участка, целесообразно перейти к переменному *x*, учтя, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4v$	–	2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$0{,}8v^2$	1,5	–	$6t$
2	4,5	24	9	$0{,}5v$	–	3	$3\sin(2t)$
3	6	14	22	$0{,}6v^2$	5	–	$-3\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$0{,}4v$	–	2	$4\cos(4t)$
5	8	10	18	$0{,}5v^2$	4	–	$-6\sin(2t)$
6	1,8	24	5	$0{,}3v$	–	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8v^2$	2,5	–	$-8\cos(4t)$
8	3	22	9	$0{,}5v$	–	3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$0{,}2v^2$	4	–	$-6\sin(4t)$

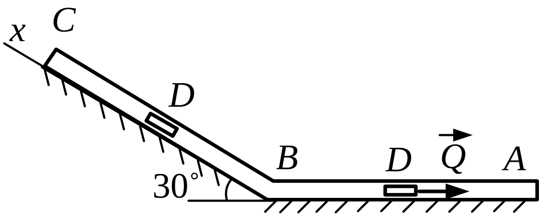


Рис. Д1.0

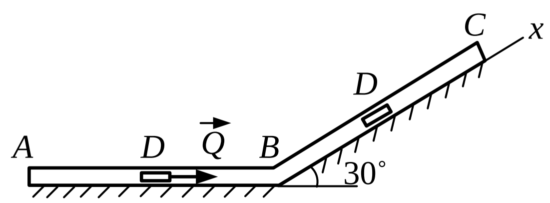


Рис. Д1.1

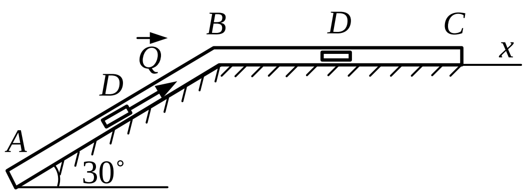


Рис. Д1.2

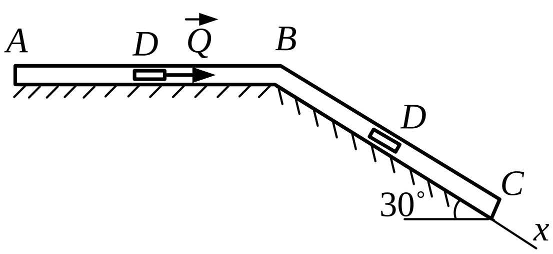


Рис. Д1.3

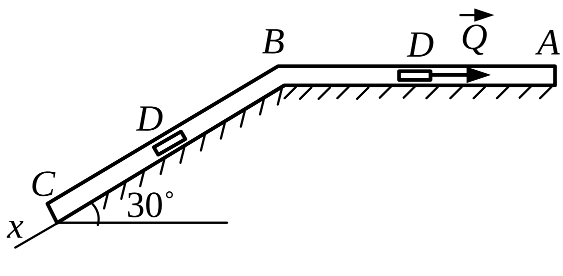


Рис. Д1.4

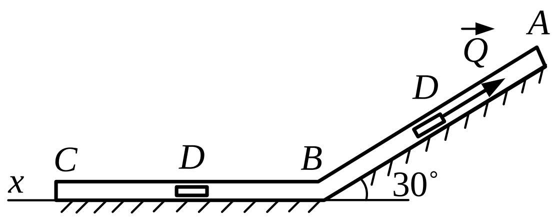


Рис. Д1.5

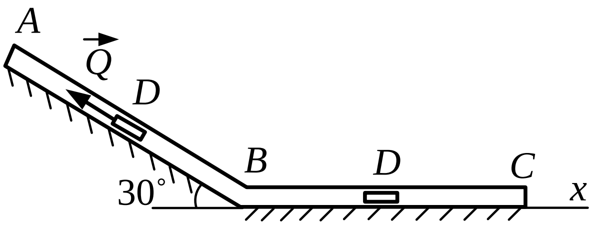


Рис. Д1.6

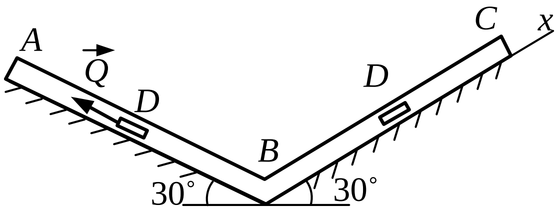


Рис. Д1.7

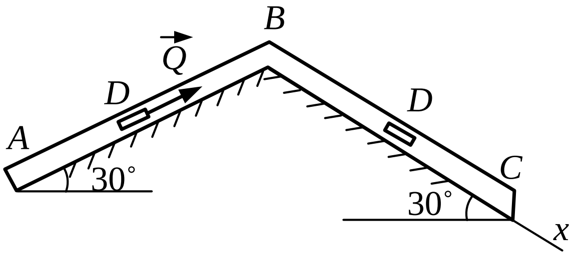


Рис. Д1.8

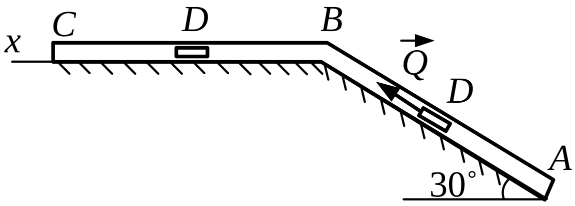


Рис. Д1.9

Пример Д1а

На вертикальном участке *AB* трубы (рис. Д1 а) на груз *D* массой *m* действуют сила тяжести и сила сопротивления *R*; расстояние от точки *A*, где $v = v_0$, до точки *B* равно *l*. На наклонном участке *BC* на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: m = 2 кг, $R = \mu v^2$, где $\mu = 0{,}4$ кг/м, $v_0 = 5$ м/с, $l = 2{,}5$ м, $F_x = 16\sin(4t)$.

Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке *BC*.

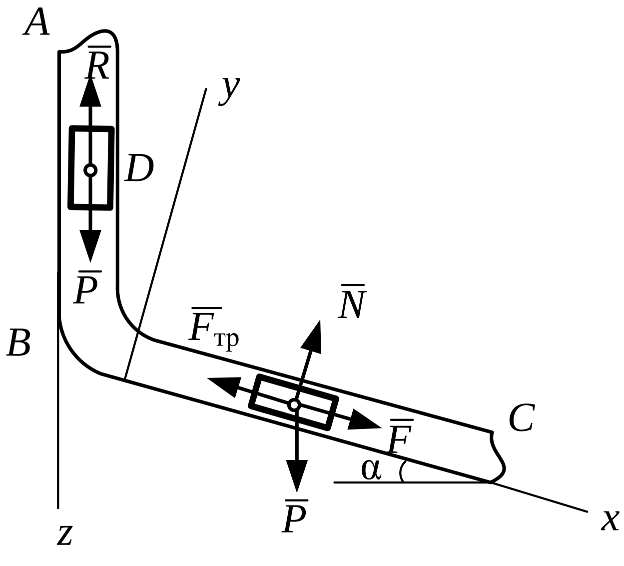


Рис. Д1 а

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$ и $\overline{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_z}{dt} = \sum F_{kz} \text{ или } mv_z\frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \qquad (1)$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$mv\frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2 \text{ или } v\frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - v^2\right). \qquad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2\ \text{м}^{-1},\ n = \frac{mg}{\mu} = 50\ \text{м}^2/\text{с}^2, \qquad (3)$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с^2. Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2v\cdot\frac{dv}{dz} = -2k\left(v^2 - n\right). \qquad (4)$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем, беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2vdv}{v^2 - n} = -2kdz \text{ и } \ln\left(v^2 - n\right) = -2kz + C_1. \qquad (5)$$

По начальным условиям при $z = 0$, $v = v_0$, что дает $C_1 = \ln\left(v_0^2 - n\right)$, и из равенства (5) находим $\ln\left(v^2 - n\right) = -2kz + \ln\left(v_0^2 - n\right)$ или $\ln\left(v^2 - n\right) - \ln\left(v_0^2 - n\right) = -2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz \text{ и } \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$v^2 = n + \left(v_0^2 - n\right)e^{-2kz}. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м и заменяя k и n их значениями (3), определим скорость груза v_B в точке B ($v_0 = 5$ м/с, число $e = 2{,}7$):

$$v_B^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \text{ и } v_B = 6{,}4\ \text{м/с}. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке *BC*; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$, $\overline{F}_{\text{тр}}$ и $\overline{F}$. Проведем из точки *B* оси *Bx* и *By* и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось *Bx*:

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{\text{тр}\,x} + F_x$$

или

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} + F_x, \qquad (8)$$

где $F_{\text{тр}} = fN$. Для определения *N* составим уравнение в проекции на ось *By*. Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{\text{тр}} = fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x = 16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на *m*, вычислим $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30^\circ - 0{,}2\cos 30^\circ) = 3{,}2$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на *dt* и интегрируя, найдем

$$v_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке *B*, считая в этот момент $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$v_B = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на *dt* и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при t = 0 x = 0, то C_3 =0 и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t), \qquad (14)$$

Ответ: $x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t)$, где x — в метрах, t — в секундах.

Пример Д1б

На горизонтальном участке AB трубы (рис. Д1б) на груз D массой m действуют сила тяжести P, сила сопротивления R и постоянная сила Q; время движения груза от точки A, где $v = v_0$, до точки B равно t_1. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести P, сила трения (коэффициент трения груза о трубу f = 0,2) и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

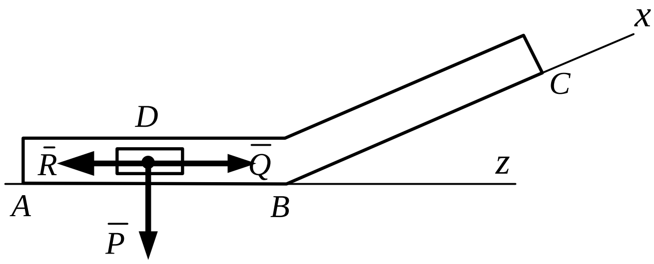


Рис. Д1б

Дано: $m = 1{,}8$ кг; $v_0 = 24$ м/с; $Q = 5$ Н; $R = \mu v$, где μ=0,3 кг/м; $t_1 = 2$ с; $F_x = 9t^2$, f=0,2.

Определить: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{Q}$ и $\bar{R}$. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_z}{dt} = \sum F_{kz} \quad \text{или} \quad m\frac{dv_z}{dt} = P_z + Q_z + R_z \qquad (1)$$

Определим проекции сил на ось z: $P_z = 0$; $Q_z = Q$; $R_z = -R = -\mu v_z$.

Дифференциальное уравнение принимает вид:

$$m\frac{dv_z}{dt} = Q - \mu v_z. \qquad (2)$$

Поделим левую и правую части на m:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{m}\left(Q - \mu v_z\right) \text{ или } \frac{dv_z}{dt} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{Q}{\mu} - v_z\right). \qquad (3)$$

Введем обозначения:

$$k = \frac{\mu}{m} = \frac{0{,}3}{1{,}8} = \frac{1}{6} = 0{,}17, \ \ м^{-1}$$
$$n = \frac{Q}{\mu} = \frac{5}{0{,}3} = 1{,}67, \ \ м^2/с^2. \qquad (4)$$

Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$\frac{dv_z}{dt} = k\left(n - v_z\right) \text{ или } \frac{dv_z}{dt} = -k\left(v_z - n\right). \qquad (5)$$

Разделяя в уравнении (5) переменные, а затем, беря от обеих частей интегралы, получим

$$dv_z = -k\left(v_z - n\right)dt, \ \frac{dv_z}{v_z - n} = -kdt.$$

$$\int \frac{dv_z}{v_z - n} = -k\int dt; \ \ln\left(v_z - n\right) = -kt + C_1.$$

C_1 определяем из начальных условий $t_0 = 0$, $z_0 = 0$, $v_{z_0} = v_0$:

$$\ln\left(v_0 - n\right) = C_1; \ \ln\left(v_z - n\right) = -kt + \ln\left(v_0 - n\right);$$

$$\ln\left(v_z - n\right) - \ln\left(v_0 - n\right) = -kt; \ \ln\frac{v_z - n}{v_0 - n} = -kt.$$

Проводим операцию потенцирования:

$$e^{-kt} = \frac{v_z - n}{v_0 - n},$$

откуда $v_z - n = \left(v_0 - n\right)e^{-kt}$; $v_z = n + \left(v_0 - n\right)e^{-kt}$.

При $t = t_1 = 2\ с$, $v_z = v_B$ определим скорость v_B груза в точке B:

$$v_B = 1{,}67 + \left(24 - 1{,}67\right)e^{-\frac{1}{6}\cdot 2} = 1{,}67 + 22{,}33e^{-\frac{1}{3}} = 1{,}67 + \frac{22{,}33}{\sqrt[3]{e}} = 17{,}67 \text{ м/с}. \qquad (6)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке BC; найденная скорость v_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем

груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{N}$, $\bar{F}_{\text{тр}}$ и $\bar{F}$ (рис. Д1 в). Проведем из точки B оси Bx и By и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Bx:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}.$$

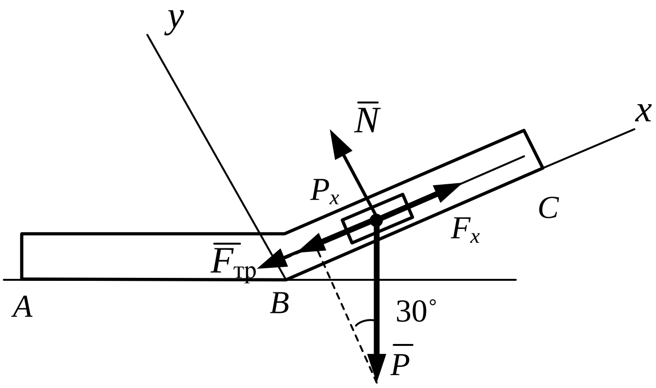


Рис. Д1в

Распишем силы, действующие на тело:

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + F_x + F_{\text{тр x}}. \tag{7}$$

Определим проекции сил на ось x:

$P_x = -P \cdot \sin 30^\circ = -mg \sin 30^\circ$; $F_x = 9t^2$, $F_{\text{тр x}} = -fN$

Дифференциальное уравнение принимает вид:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mg\sin 30^\circ + 9t^2 - fN; \tag{8}$$

Для определения N составим уравнение в проекции на ось By. Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{\text{тр x}} = -fmg\cos 30^o$; и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = -mg(\sin 30^\circ + f\cos 30^o) + 9t^2 \tag{9}$$

Разделив обе части равенства на m, вычислим $-g\left(\sin 30^o + f\cos 30^o\right) = -g\left(\sin 30^\circ + 0{,}2\cos 30^\circ\right) = -6{,}7$; $9/m = 5$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = -6{,}7 + 5t^2. \tag{10}$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем

$$v_x = -6{,}7t + 5\frac{t^3}{3} + C_2. \tag{11}$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где v_B дается равенством (6). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B.$$

При найденном значении C_2 уравнение (11) дает

$$v_B = \frac{dx}{dt} = -6{,}7t + 5\frac{t^3}{3} + 17{,}67. \qquad (12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем

$$x = 0{,}42t^4 + 3{,}35t^2 + 17{,}67t + C_3. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 0{,}42t^4 + 3{,}35t^2 + 17{,}67t + C_3 \qquad (14)$$

где x — в метрах, t — в секундах.

Ответ: $x = 3{,}35t^2 + 0{,}42t^4 + 17{,}67t$, где x — в метрах, t — в секундах.

Задача Д2

Механическая система состоит из грузов D_1 массой $m_1 = 2$ кг и D_2 массой $m_2 = 6$ кг и из прямоугольной вертикальной плиты массой $m_3 = 12$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (Рис. Д2.0–Д2.9, табл. Д2). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов $r = 0{,}4$м и $R = 0{,}8$м.

При движении грузов угол $\varphi_1 = \angle A_1C_3D_1$ изменяется по закону $\varphi_1 = f_1(t)$, а угол $\varphi_2 = \angle A_2C_3D_2$ — по закону $\varphi_2 = f_2(t)$. В табл. Д2 эти зависимости даны отдельно для рис. 0–4 и 5–9, где φ выражено в радианах, t — в секундах.

Считая грузы материальными точками и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить закон изменения со временем величины, указанной в таблице в столбце «Найти», т.е. $x_3 = f_3(t)$ и $N = f(t)$, где x_3 — координата центра C_3 плиты (зависимость $x_3 = f_3(t)$ определяет закон движения плиты), N — полная нормальная реакция направляющих.

Указания. Задача Д2 — на применение теоремы о движении центра масс. При этом для определения $x_3 = f_3(t)$ составить уравнение в проекции на горизонтальную ось x, а для определения N — на вертикальную ось y.

Таблица Д2

Номер условия	Рис. 0–4		Рис. 5–9		Найти
	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	
0	$\frac{\pi}{3}(t^2+1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2+2)$	x_3
1	$\pi(2-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+3)$	$\frac{\pi}{4}(2t-1)$	$\frac{\pi t}{6}$	N
2	$\frac{\pi}{4}(t^2+2)$	$\frac{\pi}{6}(5-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	πt^2	x_3
3	$\frac{\pi t}{3}$	$\frac{\pi}{2}(t-2)$	$\frac{\pi}{6}(3t-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t)$	N
4	$\frac{\pi}{4}(1-3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2-4)$	$\frac{\pi t^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}(2-t^2)$	x_3
5	$\frac{\pi}{6}(t+2)$	$\frac{\pi}{4}(1-t)$	$\pi(3-t)$	$\frac{\pi}{6}(t-1)$	N
6	πt^2	$\frac{\pi}{6}(1-2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(2t^2-3)$	$\frac{\pi}{3}(2-t^2)$	x_3
7	$\frac{\pi}{3}(5-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+4)$	$\frac{\pi t}{6}$	$\frac{\pi}{4}(4-t)$	N
8	$\frac{\pi}{6}(t^2+3)$	$\frac{\pi}{2}(2-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	$\pi(t^2+2)$	x_3
9	$\frac{\pi}{2}(4-t)$	$\pi(t+5)$	$\frac{\pi}{6}(2t-1)$	$\frac{\pi}{2}(2-t)$	N

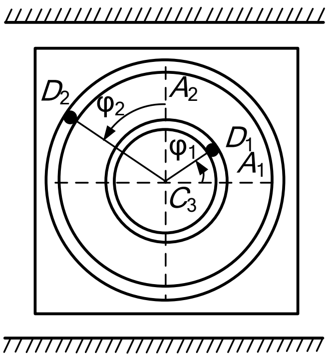


Рис. Д2.0

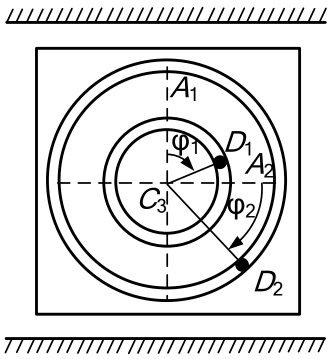


Рис. Д2.1

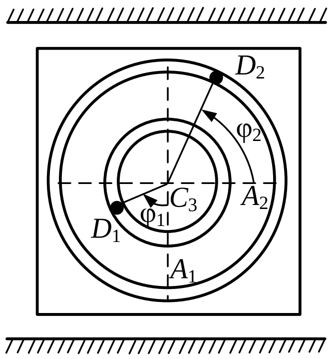


Рис. Д2.2

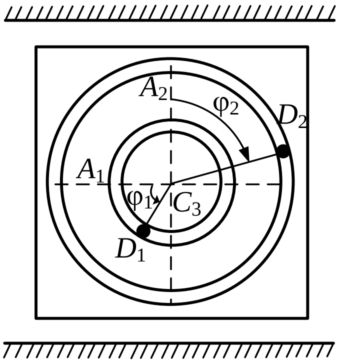


Рис. Д2.3

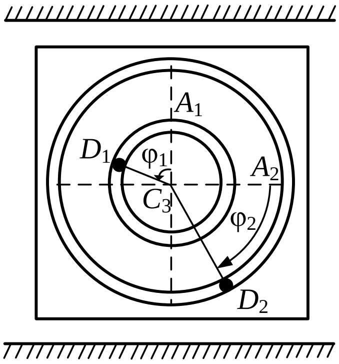


Рис. Д2.4

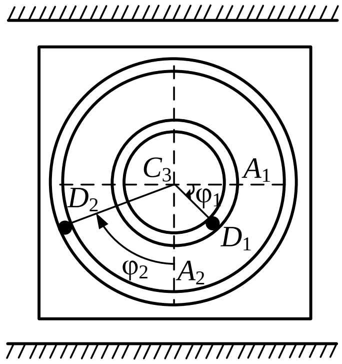


Рис. Д2.5

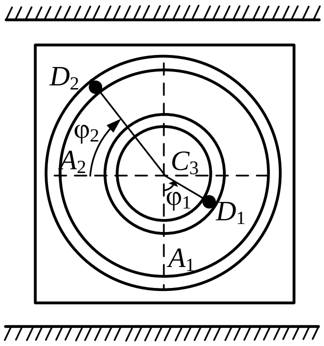


Рис. Д2.6

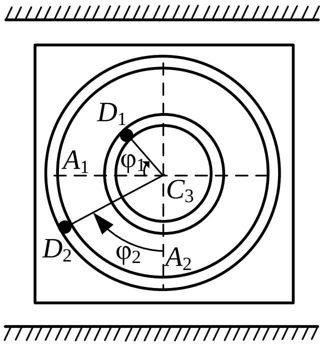


Рис. Д2.7

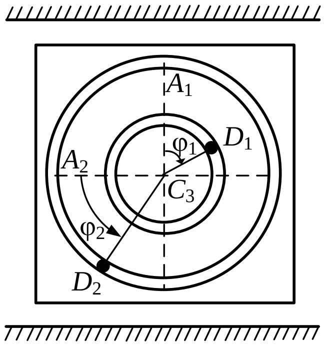


Рис. Д2.8

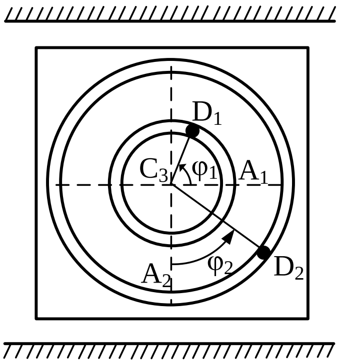


Рис. Д2.9

Пример Д2а

Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д2 а). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r и R, по законам $\varphi_1 = f_1(t)$ и $\varphi_2 = f_2(t)$.

Дано: m_1 = 6 кг; m_2 = 8 кг; m_3 = 12 кг; r = 0,6 м; R = 1,2 м; $\varphi_1 = \pi t$ рад, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}(1-t)$ рад (t — в секундах).

Определить: $x_3 = f_3(t)$ — закон движения плиты, $N = f(t)$ — закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

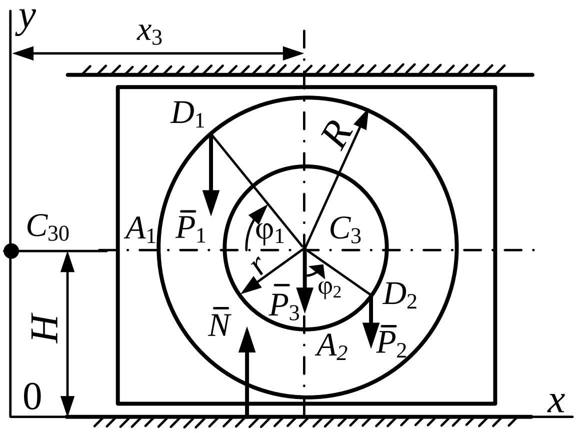


Рис. Д2 а

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2, в произвольном положении (рис. Д2 а). Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ и реакцию направляющих $\bar{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени $t_0 = 0$.

1. **Определение перемещения** x_3. Для определения $x_3 = f_3(t)$ воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x. Получим

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \text{ или } M\ddot{x}_C = 0, \tag{1}$$

так как $\sum F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение (1), найдем, что $M\dot{x}_C = C_1$, т.е. проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени $v_{Cx} = 0$, то $C_1 = 0$.

Интегрируя уравнение $M\dot{x}_C = 0$, получим

$$Mx_C = \text{const}, \tag{2}$$

т.е. центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Определим значение Mx_c. Из рис. Д2а видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 - R\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 + r\sin\varphi_2$. Так как по формуле, определяющей координату x_C центра масс системы, $Mx_C = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$, то

$$Mx_C = m_1(x_3 - R\cos\varphi_1) + m_2(x_3 + r\sin\varphi_2) + m_3 x_3$$

или

$$Mx_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1 R\cos(\pi t) + m_2 r\sin(\pi/2 - \pi t/2) \qquad (3)$$

В соответствии с равенством (2) координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положениях будут равны. Следовательно, учитывая, что при $t_0 = 0$ $x_3 = 0$, получим

$$-m_1 R + m_2 r = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1 R\cos(\pi t) + m_2 r\cos(\pi t/2). \qquad (4)$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3.

Ответ: $x_3 = 0{,}09[3\cos(\pi t) - 2\cos(\pi t/2) - 1]$м, где t — в секундах.

2. **Определение реакции *N***. Для определения $N = f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось y (см. рис. Д2а):

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \text{ или } M\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3. \qquad (1)$$

Отсюда получим, учтя, что $P_1 = m_1 g$, и т.д.:

$$N = M\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)g. \qquad (2)$$

По формуле, определяющей ординату y_c центра масс системы,

$$My_C = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3,$$

где $y_1 = H + R\sin\varphi_1$, $y_2 = H - r\cos\varphi_2$, $y_3 = H = OC_{30} = \text{const}$,

получим

$$My_C = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin(\pi t) - m_2 r\cos(\pi/2 - \pi t/2)$$

или

$$My_C = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 R\sin(\pi t) - m_2 r\sin(\pi t/2).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдем

$$M\dot{y}_C = m_1 R\pi\cos(\pi t) - m_2 r(\pi/2)\cos(\pi t/2);$$

$$M\ddot{y}_C = -m_1 R\pi^2\sin(\pi t) + m_2 r(\pi^2/4)\sin(\pi t/2).$$

Подставив это значение $M\ddot{y}_C$ в уравнение (2), определим искомую зависимость N от t.

Ответ: $N = 254{,}8 - 1{,}2\pi^2[6\sin(\pi t) - \sin(\pi t/2)]$Н, где t — в секундах.

Пример Д2б

Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д2б). В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r и R, по законам $\varphi_1 = f_1(t)$ и $\varphi_2 = f_2(t)$.

Дано: m_1 = 2 кг; m_2 = 6 кг; m_3 = 12 кг; r = 0,4 м; R = 0,8 м; $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3}(t^2+1)$; $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}(t^2-2)$ рад (t — в секундах).

Определить: $x_3 = f_3(t)$ — закон движения плиты, $N = f(t)$ — закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

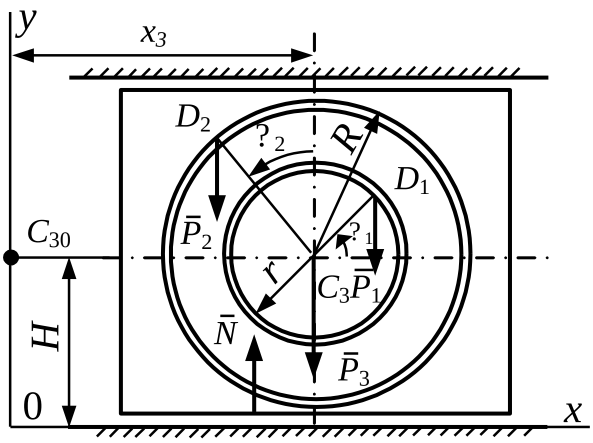


Рис. Д2 б

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2, в произвольном положении (рис. Д2б). Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ и реакцию направляющих $\bar{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени $t_0 = 0$.

1. **Определение перемещения x_3.** Для определения $x_3 = f_3(t)$ воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось x. Получим

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \text{ или } M\ddot{x}_C = 0, \qquad (1)$$

так как $\sum F_{kx}^e = 0$, поскольку все действующие на систему внешние силы вертикальны.

Проинтегрировав уравнение (1), найдем, что $Mv_{Cx} = C_1$ (или $M\dot{x}_C = C_1$), т.е. проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. Так как в начальный момент времени (при $t = 0$) $v_{Cx} = 0$, то $C_1 = 0$.

Интегрируя уравнение $M\dot{x}_C = 0$, получим

$$Mx_C = \text{const}\,, \tag{2}$$

т.е. центр масс системы вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Определим значение Mx_c. Из рис. Д2б видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 + r\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 - R\sin\varphi_2$. Так как по формуле, определяющей координату x_C центра масс системы, $Mx_C = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$, то

$Mx_C = m_1(x_3 + r\cos\varphi_1) + m_2(x_3 - R\sin\varphi_2) + m_3x_3$ или

$$Mx_C = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 r\cos\varphi_1 - m_2R\sin\varphi_2 =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 r\cos\left[\frac{\pi}{3}(t^2+1)\right] - m_2R\sin\left[\frac{\pi}{6}(t^2-2)\right] \tag{3}$$

В соответствии с равенством (2) координаты центра масс x_C всей системы в начальном и произвольном положениях будут равны

$Mx_C = const$, $Mx_C = Mx_{C0}$.

Следовательно, учитывая, что при $t_0 = 0$ $x_3 = 0$, получим

$$Mx_{C0} = m_1 r\cos\frac{\pi}{3} + m_2R\sin\frac{\pi}{3}.$$

Тогда

$$(m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 r\cos\left[\frac{\pi}{3}(t^2+1)\right] - m_2R\sin\left[\frac{\pi}{6}(t^2-2)\right] =$$
$$= m_1 r\cos\frac{\pi}{3} + m_2R\sin\frac{\pi}{3} \tag{4}$$

Отсюда получаем зависимость координаты x_3 от времени:

$$x_3 = \frac{m_1 r\cos\frac{\pi}{3} + m_2R\sin\frac{\pi}{3} - m_1 r\cos\left[\frac{\pi}{3}(t^2+1)\right] + m_2R\sin\left[\frac{\pi}{6}(t^2-2)\right]}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{2\cdot 0{,}4\cos\frac{\pi}{3} + 6\cdot 0{,}8\sin\frac{\pi}{3} - 2\cdot 0{,}4\cos\left[\frac{\pi}{3}(t^2+1)\right] + 6\cdot 0{,}8\sin\left[\frac{\pi}{6}(t^2-2)\right]}{2+6+12};$$

Упростим выражение:

$$x_3 = 0{,}23 - 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) + 0{,}24\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: $x_3 = 0{,}23 - 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) + 0{,}24\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)$м, где t — в секундах.

2. **Определение реакции *N*.** Для определения $N = f(t)$ составим дифференциальное уравнение движения центра масс системы в проекции на вертикальную ось y (см. рис. Д2б):

$$M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e = N - P_1 - P_2 - P_3 \tag{1}$$

Отсюда получим, учтя, что $P_1 = m_1 g$, и т.д.:

$$N = M\ddot{y}_C + P_1 + P_2 + P_3 = M\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)g\,. \tag{2}$$

По формуле, определяющей ординату y_c центра масс системы,

$$My_C = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3\,,$$

где $y_1 = H + r\sin\varphi_1$, $y_2 = H + R\cos\varphi_2$, $y_3 = H$,

получим

$$My_C = m_1(H + r\sin\varphi_1) + m_2(H + R\cos\varphi_2) + m_3 H =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 r\sin\varphi_1 + m_2 R\cos\varphi_2$$

или

$$My_C = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1 r\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) + m_2 R\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right).$$

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдем

$$M\dot{y}_C = m_1 r\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\frac{2\pi t}{3} - m_2 R\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\pi t}{3} =$$
$$= \frac{m_1 r 2\pi}{3}\left[t\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right] - \frac{m_2 R\pi}{3}\left[t\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right];$$

$$M\ddot{y}_C = \frac{m_1 r 2\pi}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\pi t^2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right] -$$
$$- \frac{m_2 R\pi}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi t^2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Подставив это значение $M\ddot{y}_C$ в уравнение (2), определим искомую зависимость N от t.

$$N = \frac{m_1 r 2\pi}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\pi t^2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right] -$$

$$-\frac{m_2 R\pi}{3}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi t^2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right] + (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

$$N = 196 + 1{,}68\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) - 2{,}09t^2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right] - 5{,}03\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}05t^2\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Ответ:

$$N = 196{,}2 + 1{,}68\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right) - 2{,}09t^2\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right] - 5{,}03\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}05t^2\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2 - \frac{\pi}{3}\right)\right]\ \text{Н},$$

где t — в секундах.

Задача Д3

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты *1* массой $m_1 = 18$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих и груза D массой $m_2 = 6$ кг (рис. Д3.0–Д3.9, табл. Д3). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $u_0 = 2$ м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты.

Таблица Д3

Номер условия	$s = f_1(t)$		$\varphi = f_2(t)$	
	рис. 0, 1	рис. 2, 3	рис. 4, 5, 6	рис. 7, 8, 9
1	2	3	4	5
0	$0{,}8\sin(\pi t^2)$	$0{,}4(3t^2 - 2)$	$\pi(3 - 2t^2)/3$	$\pi(2t^2 - 1)$
1	$1{,}2\cos(\pi t/2)$	$0{,}6\sin(\pi t^2/2)$	$\pi(1 - 3t^2)/4$	$\pi(1 - 4t^2)/3$
2	$0{,}6(2t^2 - 1)$	$0{,}8\cos(\pi t)$	$\pi(t^2 - 3)/6$	$\pi(3 + 4t^2)/6$
3	$0{,}4\sin(\pi t^2/3)$	$0{,}5\sin(\pi t^2/6)$	$\pi(2 - t^2)$	$\pi(t^2 + 1)/2$
4	$0{,}5\cos(\pi t/6)$	$1{,}2\cos(\pi t/3)$	$\pi(1 + 2t^2)/6$	$\pi(1 - 5t^2)/4$
5	$0{,}6\sin(\pi t^2/4)$	$0{,}5(3 - 4t^2)$	$\pi(5t^2 + 1)/4$	$\pi(t^2 - 4)/3$
6	$0{,}8(2 - 3t^2)$	$0{,}8\sin(\pi t^2/3)$	$\pi(t^2 - 2)/2$	$\pi t^2/4$
7	$0{,}6\cos(\pi t/3)$	$0{,}4\cos(\pi t/4)$	$\pi(3 + t^2)/3$	$\pi(3t^2 - 1)/6$
8	$1{,}2\sin(\pi t^2/6)$	$1{,}2\sin(\pi t^2)$	$\pi t^2/2$	$\pi(t^2 + 3)/2$
9	$0{,}8\cos(\pi t/4)$	$0{,}6\cos(\pi t/6)$	$\pi(t^2 + 2)/6$	$\pi(2 - t^2)/4$

На рис. 0–3 желоб *KE* прямолинейный и при движении груза расстояние $s = AD$ изменяется по закону $s = f_1(t)$, а на рис. 4–9 желоб — окружность радиуса R = 0,8м и при движении груза угол $\varphi = \angle AC_1D$ изменяется по закону $\varphi = f_2(t)$. В табл. Д3 эти зависимости даны отдельно для рис. 0 и 1, для рис. 2 и 3 и т.д., где s выражена в метрах, φ — в радианах, t — в секундах.

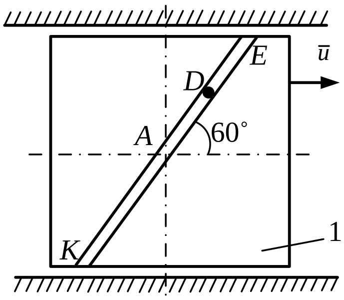


Рис. Д3.0

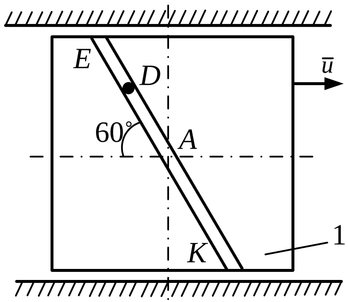


Рис. Д3.1

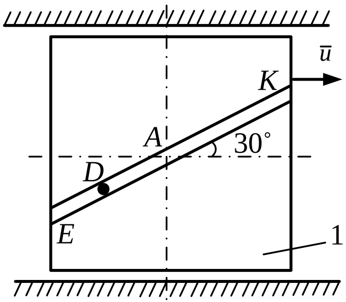


Рис. Д3.2

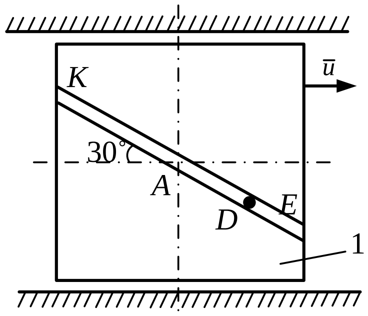


Рис. Д3.3

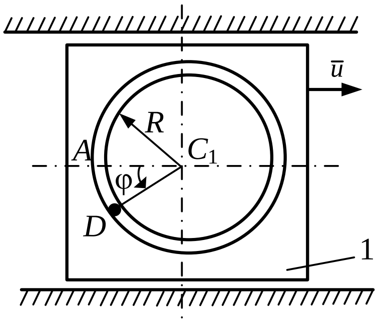


Рис. Д3.4

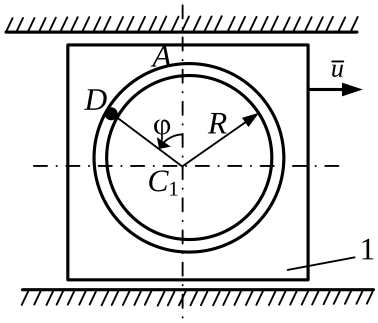


Рис. Д3.5

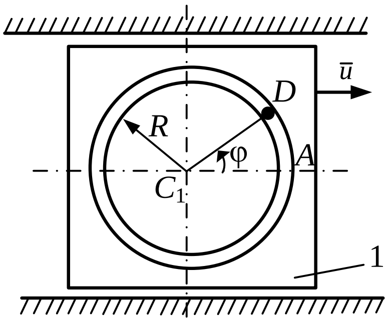


Рис. Д3.6

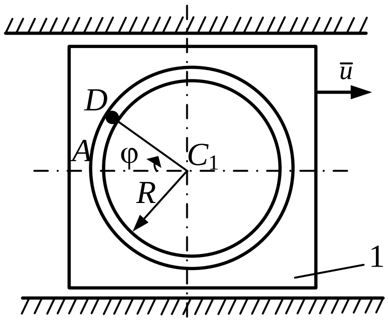


Рис. Д3.7

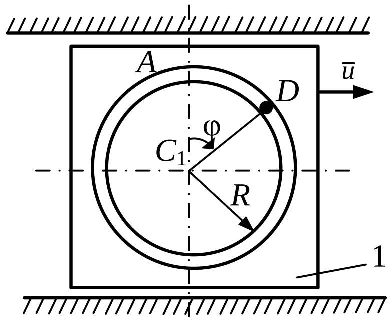


Рис. Д3.8

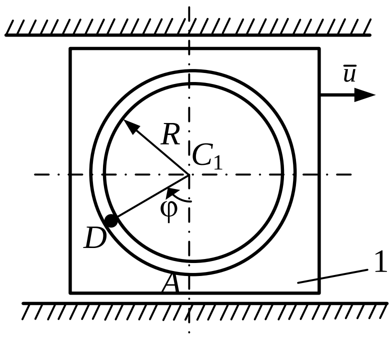


Рис. Д3.9

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить зависимость $u = f(t)$, т.е. скорость плиты как функцию времени.

Указания. Задача Д3 на применение теоремы об изменении количества движения системы. При решении составить уравнение, выражающее теорему, в проекции на горизонтальную ось.

Пример Д3а

Плита массой m_1 имеет желоб — окружность радиуса R. Плита движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью u. В желобе расположен груз D массой m_2 (рис.Д3 а). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $u = u_0$, груз D начинает двигаться по желобу по закону $\varphi = \varphi(t)$.

Дано: m_1 = 24 кг; m_2 = 12 кг; u_0 = 0,5 м/с; R = 0,6 м; $\varphi = (\pi/3)(1 + 2t^3)$ рад. (t — в секундах)

Определить: $u = f(t)$ — закон изменения скорости плиты.

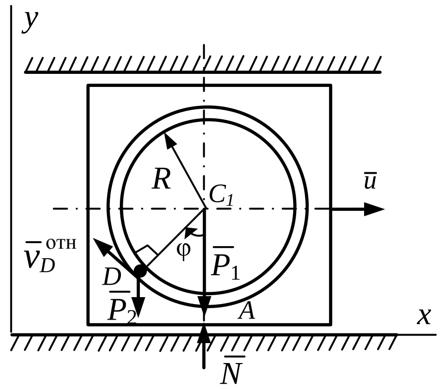


Рис. Д3 а

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ и реакцию плоскости $\overline{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось x была горизонтальна.

Чтобы определить u, воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы $\overline{Q}$ в проекции на ось x. Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рис. Д3 а), то $\sum F_{kx}^e = 0$ и теорема дает

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0, \text{ откуда } Q_x = C_1. \qquad (1)$$

Для рассматриваемой механической системы $\overline{Q} = \overline{Q}^{\Pi} + \overline{Q}^{D}$, где $\overline{Q}^{\Pi} = m_1\overline{u}$ и $\overline{Q}^{D} = m_2\overline{v}_D$ — количества движения плиты и груза D соответственно ($\overline{u}$ — скорость плиты, $\overline{v}_D$ — скорость груза по отношению к осям Oxy). Тогда из равенства (1) следует, что

$$Q_x^{\Pi} + Q_x^{D} = C_1 \text{ или } m_1 u_x + m_2 v_{Dx} = C_1. \qquad (2)$$

Для определения v_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным (это движение, совершаемое при движении груза D по желобу), а движение самой плиты — переносным. Тогда $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{\text{пер}} + \bar{v}_D^{\text{отн}}$ и $v_{Dx} = v_{Dx}^{\text{пер}} + v_{Dx}^{\text{отн}}$. (3)

Но $\bar{v}_D^{\text{пер}} = u$ и, следовательно, $v_{Dx}^{\text{пер}} = u_x$. Вектор $\bar{v}_D^{\text{отн}}$ направлен по касательной к траектории и численно $v_D^{\text{отн}} = R \cdot \omega_{AD} = R\dot{\varphi} = 2R\pi t^2$.

Изобразив этот вектор на рис. Д3а с учетом знака $\dot{\varphi}$, найдем, что $v_{Dx}^{\text{отн}} = -v_{Dx}^{\text{отн}} \cos\varphi$. Окончательно из равенства (3) получим

$$v_{Dx} = u_x - v_D^{\text{отн}} \cos\varphi = u_x - 2R\pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right). \qquad (4)$$

Величину v_{Dx} можно еще найти другим путем, определив абсциссу x_D груза D, для которой, как видно из рис. Д3а, получим $x_D = x_A - R\sin\varphi$, тогда $v_{Dx} = \dot{x}_D = \dot{x}_A - R\dot{\varphi}\cos\varphi$, где $\dot{x}_A = u_x$, а $\dot{\varphi} = 2\pi t^2$.

При найденном значении v_{Dx} равенство (2), если учесть, что $u_x = u$, примет вид

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2R\pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) = C_1. \qquad (5)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при $t = 0$ $u = u_0$. Подстановка этих величин в уравнение (5) дает $C_1 = (m_1 + m_2)\, u_0$ и тогда из (5) получим

$$(m_1 + m_2)u - 2m_2 R\pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) = (m_1 + m_2)u_0 .$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости u плиты от времени:

$$u = u_0 + \frac{2R\pi m_2}{m_1 + m_2} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right).$$

Подставив сюда значения соответствующих величин, находим искомую зависимость u от t.

Ответ: $u = 0{,}5 + 0{,}4\pi t^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right)$ м/с.

Пример Д3б

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты *1* массой $m_1 = 18$ кг, движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза D

массой $m_2 = 6$кг (рис. Д3б). В момент времени $t_0 = 0$, когда скорость плиты $u_0 = 2$м/с, груз под действием внутренних сил начинает двигаться по желобу плиты. При движении груза дуговая координата s = AD изменяется по закону $s = f_1(t)$.

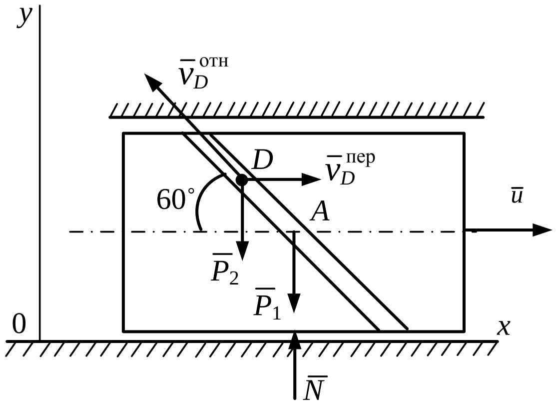


Рис. Д3 б

Дано: $m_1 = 18$ *кг*; $m_2 = 6$ *кг*; $u_0 = 2$ *м/с*; $s = AD = 1{,}2\cos\dfrac{\pi t}{2}$.

Определить: скорость плиты как функцию времен $u = f(t)$.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и груза D, в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ и реакцию плоскости $\bar{N}$. Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось x была горизонтальна.

Чтобы определить u, воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы $\bar{Q}$ в проекции на ось x. Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рис. Д3 б), то $\sum F_{kx}^e = 0$ и теорема дает

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0, \text{ откуда } Q_x = C_1. \qquad (1)$$

Для рассматриваемой механической системы $\bar{Q} = \bar{Q}^П + \bar{Q}^D$, где $\bar{Q}^П = m_1\bar{u}$ и $\bar{Q}^D = m_2\bar{v}_D$ — количества движения плиты и груза D соответственно ($\bar{u}$ — скорость плиты, $\bar{v}_D$ — скорость груза по отношению к осям Oxy). Тогда из равенства (1) следует, что

$$Q_x^П + Q_x^D = C_1 \text{ или } m_1 u_x + m_2 v_{Dx} = C_1. \qquad (2)$$

Для определения v_{Dx} рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по отношению к плите относительным, а движение самой плиты — переносным. Тогда $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{\text{пер}} + \bar{v}_D^{\text{отн}}$ и

$$v_{Dx} = v_{Dx}^{\text{пер}} + v_{Dx}^{\text{отн}}. \qquad (3)$$

Но $\bar{v}_D^{\text{пер}} = u$ и, следовательно, $v_{Dx}^{\text{пер}} = u_x$. Вектор $\bar{v}_D^{отн} = \dot{s}$.

Изобразив этот вектор на рис. Д3б с учетом знака $\dot{s}$, найдем, что $v_{Dx}^{отн} = -\dot{s}\cos 60^\circ$, где $\dot{s} = -0{,}6\pi \sin\dfrac{\pi t}{2}$. Окончательно из равенства (3) получим

$$v_{Dx} = u_x + 0{,}6\pi\cos 60^\circ \cdot \sin\frac{\pi t}{2}. \qquad (4)$$

При найденном значении v_{Dx} равенство (2), если учесть, что $u_x = u$, примет вид

$$m_1 u + m_2 u + m_2 0{,}6\pi\cos 60^\circ \cdot \sin\frac{\pi t}{2} = C_1. \qquad (5)$$

Постоянную интегрирования C_1 определим по начальным условиям: при $t = 0$ $u = u_0$. Подстановка этих величин в уравнение (5) дает $C_1 = (m_1 + m_2)u_0$ и тогда из (5) получим

$$(m_1 + m_2)u + 0{,}3\pi\, m_2 \sin\frac{\pi t}{2} = (m_1 + m_2)u_0.$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости u плиты от времени: $u = u_0 - \dfrac{0{,}3\pi\, m_2}{m_1 + m_2}\sin\dfrac{\pi t}{2}$.

Подставив сюда значения соответствующих величин, находим искомую зависимость u от t.

Ответ: $u = 2 - \dfrac{0.3\pi \cdot 6}{18 + 6}\sin\dfrac{\pi t}{2} = 2 - 0.236\sin\dfrac{\pi t}{2}$ м/с.

Задача Д4

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса *R* или прямоугольная со сторонами *R* и 2*R*, где *R* = 1,2м) массой $m_1 = 24$кг вращаются с угловой скоростью $\omega_0 = 10\,\text{с}^{-1}$ вокруг вертикальной оси *z*, отстоящей от центра масс *C* платформ на расстоянии *OC*=*b* (рис. Д4.0–Д4.9, табл. Д4); размеры для всех прямоугольных платформ показан на рис. Д4.0 а (вид сверху).

В момент времени $t_0 = 0$ по желобу платформы начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз *D* массой $m_2 = 8$кг по закону *s* =*AD* = *F*(*t*), где *s* выражено в метрах, *t* — в секундах. Одновременно на платформу начинает действовать пара сил с моментом *M* (задан в ньютонометрах; при *M* < *0* его направление противоположено показанному на рисунках).

Определить, пренебрегая массой вала, зависимость $\omega = f(t)$, т.е. угловую скорость платформы, как функцию времени.

На всех рисунках груз *D* показан в положении, при котором *s* > 0 (когда *s* < 0, груз находится по другую сторону от точки *A*). Изображая чертеж решаемой задачи, провести ось *z* на заданном расстоянии *OC* = *b* от центра *C*.

Указания. Задача Д4 — на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент K_z системы относительно оси *z* определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость груза складывается из относительной $\bar{v}_{\text{отн}}$ и переносной $\bar{v}_{\text{пер}}$ скоростей, т.е. $\bar{v} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$. Поэтому и количество движения этого груза $m\bar{v} = m\bar{v}_{\text{отн}} + m\bar{v}_{\text{пер}}$. Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой $m_z(m\bar{v}) = m_z(m\bar{v}_{отн}) + m_z(m\bar{v}_{пер})$; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения разъяснен в примерах Д4а и Д4б.

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид на платформу сверху (с конца оси *z*), как это сделано на рис. Д4.0, а–Д4.9, а.

Момент инерции пластины с массой *m* относительно оси *Cz*, перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс *C*, равен:

– для прямоугольной пластины со сторонами a_1 и a_2

$$I_{Cz} = m\left(a_1^2 + a_2^2\right)/12\,;$$

– для круглой пластины радиуса R

$$I_{Cz} = mR^2/2\,.$$

Таблица Д4

Номер условия	b, м	$s = F(t)$, м	M, Нм
1	2	3	4
0	R	–0,4t2	6
1	R/2	0,6t2	4t
2	R	–0,8t2	–6
3	R/2	10t	–8t
4	R	0,4t3	10
5	R/2	–0,5t	–9t2
6	R	–0,6t	8
7	R/2	0,8t	6t2
8	R	0,4t3	–10t
9	R/2	0,5t2	12t2

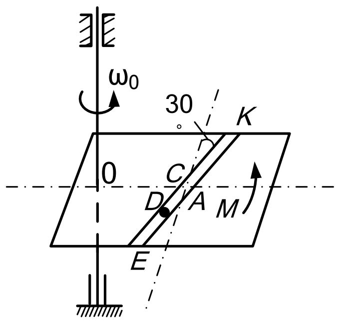


Рис. Д4.0

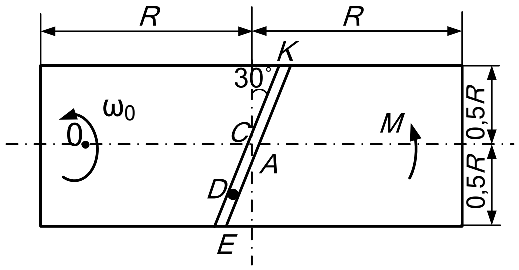


Рис. Д4.0а

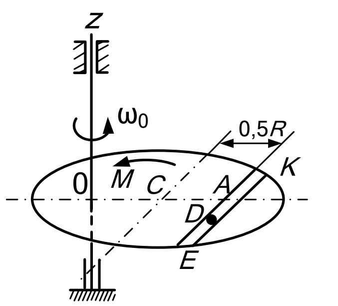


Рис. Д4.1

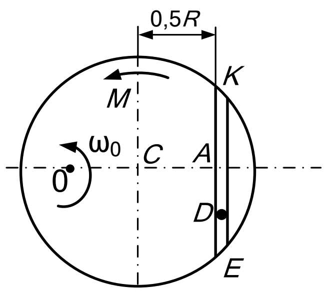


Рис. Д4.1а

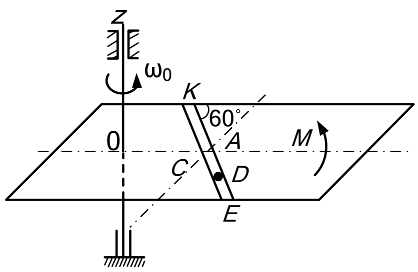


Рис. Д4.2

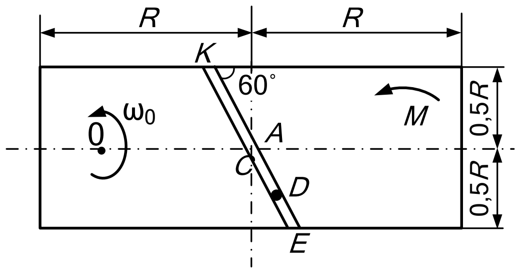


Рис. Д4.2а

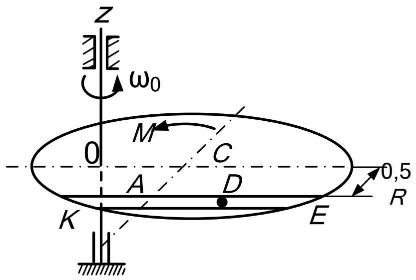


Рис. Д4.3

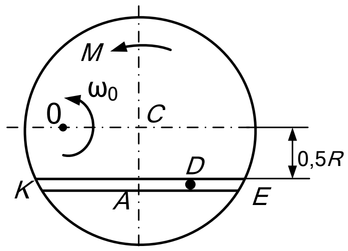


Рис. Д4.3а

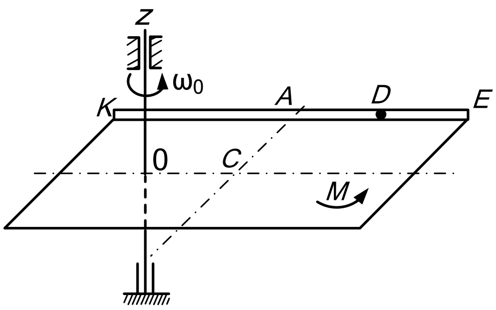


Рис. Д4.4

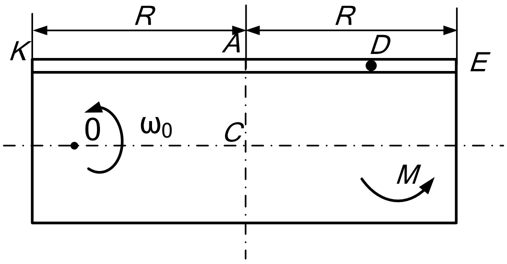


Рис. Д4.4а

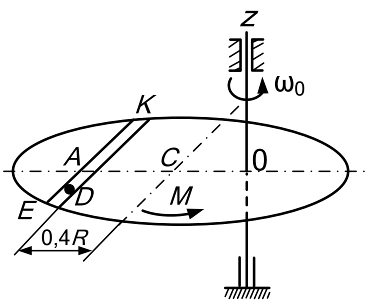


Рис. Д4.5

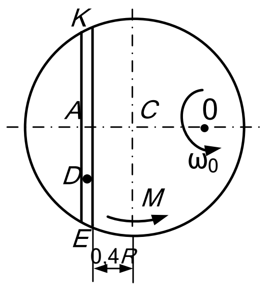


Рис. Д.4.5а

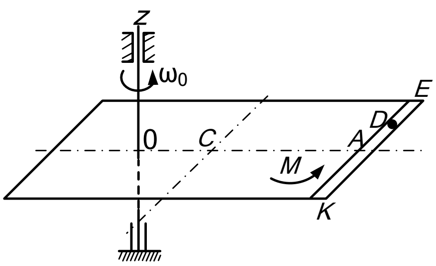


Рис. Д4.6

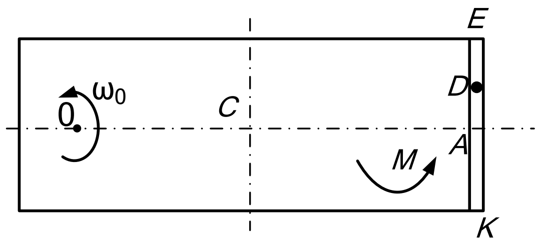


Рис. Д4.6а

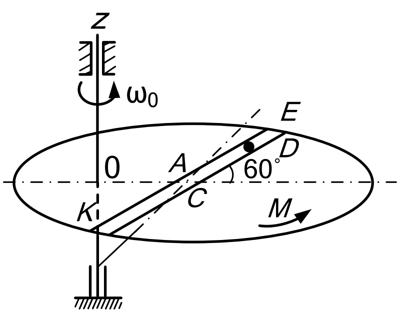


Рис. Д4.7

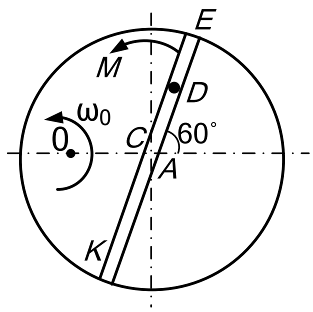


Рис. Д4.7а

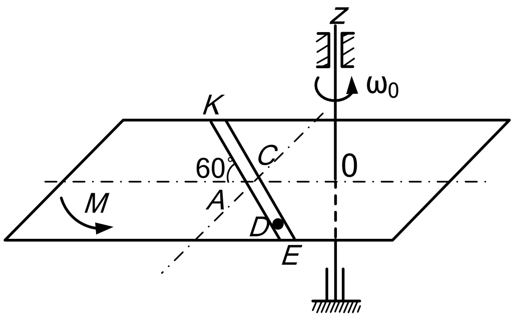


Рис. Д4.8

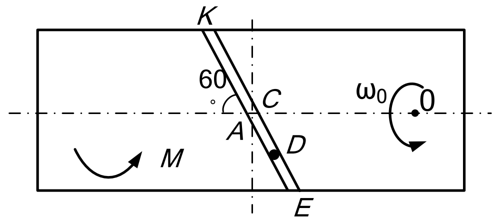


Рис. Д4.8а

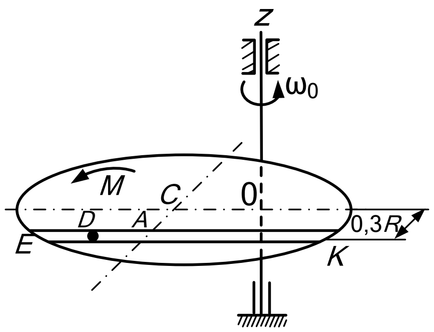


Рис. Д4.9

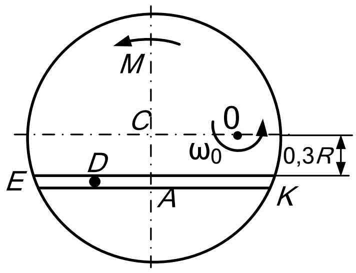


Рис. Д4.9а

Пример Д4а

Однородная горизонтальная платформа (прямоугольная со сторонами $2R$ и R), имеющая массу m_1, жестко скреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рис. Д4а). В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий момент M, направленный противоположно ω_0; одновременно груз D массой m_2, находящийся в желобе AB в точке C, начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону $s = CD = F(t)$.

Дано: $m_1 = 16$ кг; $m_2 = 10$ кг; $R = 0{,}5$м; $\omega_0 = 2$ с$^{-1}$; $s = 0{,}4t^2$ (s — в метрах, t — в секундах), $M = kt$, где $k = 6$ Н м/с.

Определить: $\omega = f(t)$ — закон изменения угловой скорости платформы.

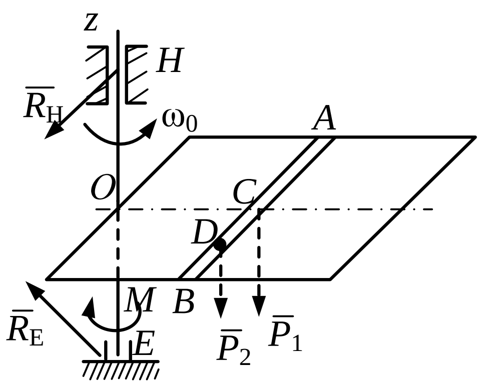


Рис. Д4а

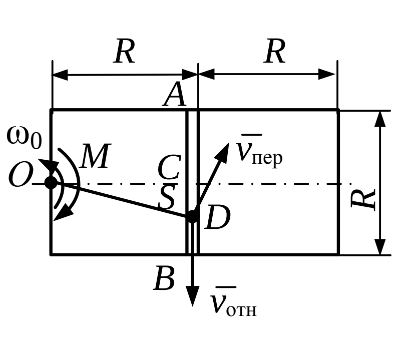


Рис. Д4б

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза *D*. Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси *z*:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right). \qquad (1)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, реакции $\overline{R}_E$, $\overline{R}_H$ и вращающий момент *M*. Так как силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ параллельны оси *z*, а реакции $\overline{R}_E$ и $\overline{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси *z* равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (т.е. против хода часовой стрелки), получим $\sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right) = -M = -kt$ и уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt\,. \qquad (2)$$

Умножая обе части этого уравнения на *dt* и интегрируя, получим

$$K_z = -\frac{k}{2}t^2 + C_1\,. \qquad (3)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{\text{пл}} + K_z^D, \qquad (4)$$

где $K_z^{\text{пл}}$ и K_z^D — кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси *z*, то $K_z^{\text{пл}} = I_z\omega$. Значение I_z найдем по теореме Гюйгенса: $I_z = I_{Cz'} + m_1 \cdot (OC)^2 = I_{Cz'} + m_1R^2$ ($I_{Cz'}$ — момент инерции относительно оси z', параллельной оси *z* и проходящей через центр *C* платформы).

Но, как известно,

$$I_{Cz'} = m_1\left[(2R)^2 + R^2\right]/12 = 5m_1R^2/12\,.$$

Тогда

$$I_z = 5m_1R^2/12 + m_1R^2 = 17m_1R^2/12\,.$$

Следовательно,

$$K_z^{\text{пл}} = \left(17m_1R^2/12\right)\omega\,. \qquad (5)$$

Для определения K_z^D обратимся к рис. Д4 б и рассмотрим движение груза *D* как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси *z* переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\bar{v} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$. Так как груз D движется по закону $s = CD = 0{,}4t^2$, то $v_{\text{отн}} = \dot{s} = 0{,}8t$; изображаем вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ на рис. Д4 б с учетом знака $\dot{s}$ (при $\dot{s} < 0$ направление $\bar{v}_{\text{отн}}$ было бы противоположным). Затем, учитывая направление ω, изображаем вектор $\bar{v}_{\text{пер}}$ $(\bar{v}_{\text{пер}} \perp OD)$; численно $v_{\text{пер}} = \omega \cdot OD$. Тогда, по теореме Вариньона,

$$K_z^D = m_z(m_2\bar{v}) = m_z(m_2\bar{v}_{\text{отн}}) + m_z(m_2\bar{v}_{\text{пер}}) = -m_2 v_{\text{отн}} \cdot OC +$$

$$+ m_2 v_{\text{пер}} \cdot OD = -m_2 \cdot 0{,}8tR + m_2\omega(OD)^2. \qquad (6)$$

Но на рис. Д4б видно, что $OD^2 = R^2 + s^2 = R^2 + 0{,}16t^4$. Подставляя эту величину в равенство (6), а затем значения K_z^D и $K_z^{\text{пл}}$ из (6) и (5) в равенство (4), получим с учетом данных задачи

$$K_z = \frac{17}{12} m_1 t^2 \omega + m_2\omega(t^2 + 0{,}16t^4) - m_2(0{,}8t)R = (8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (3), где $k = 6$, примет вид

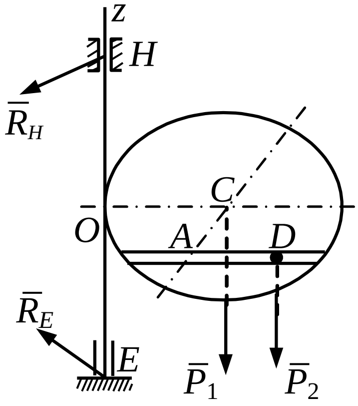
$$(8{,}17 + 1{,}6t^4)\omega - 4t = -3t^2 + C_1. \qquad (8)$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $\omega = \omega_0$. Получим $C_1 = 8{,}17\omega_0 = 16{,}34$. При этом значении C_1 из уравнения (8) находим искомую зависимость ω от t.

Ответ: $\omega = (16{,}34 + 4t - 3t^2)/(8{,}17 + 1{,}6t^4)$ с$^{-1}$, где t — в секундах.

Пример Д4б

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса R), имеющая массу m_1, жестко скреплена с вертикальным валом и вращается вместе с ним вокруг оси z с угловой скоростью ω_0 (рис. Д4 в). В момент времени $t_0 = 0$ на вал начинает действовать вращающий момент M в том же направлении что и ω_0; одновременно груз D массой m_2, находящийся в желобе AB в точке C, начинает двигаться по желобу (под действием внутренних сил) по закону $s = AD = F(t)$.



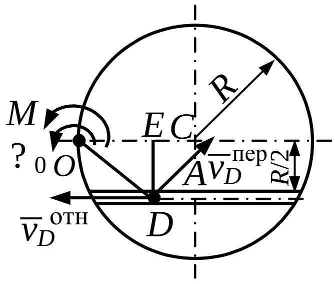


Рис. Д4в Рис. Д4г

Дано: m_1 = 24 кг; m_2 = 8 кг; R = 1,2 м; ω_0=10 с$^{-1}$; M = 10 Нм/с; $s = AD = -0{,}4t^2$ (s — в метрах, t — в секундах).

Определить: $\omega = f(t)$ — закон изменения угловой скорости платформы.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из платформы и груза D. Для определения ω применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси z:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right). \qquad (1)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, реакции $\overline{R}_E$, $\overline{R}_H$ и вращающий момент M. Так как силы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ параллельны оси z, а реакции $\overline{R}_E$ и $\overline{R}_H$ эту ось пересекают, то их моменты относительно оси z равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление ω_0 (т.е. против хода часовой стрелки), получим $\sum m_z\left(\overline{F}_k^e\right) = M$ и уравнение (1) примет вид

$$\frac{dK_z}{dt} = M\ . \qquad (2)$$

Умножая обе части этого уравнения на dt и интегрируя, получим

$$dK_z = Mdt\ , K_z = Mt + C_1. \qquad (3)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{\text{пл}} + K_z^D, \qquad (4)$$

где $K_z^{\text{пл}}$ и K_z^D — кинетические моменты платформы и груза D соответственно.

Так как платформа вращается вокруг оси z, то $K_z^{\text{пл}} = I_z\omega$. Значение I_z найдем по теореме Гюйгенса: $I_z = I_{Cz'} + m_1 \cdot (OC)^2 = I_{Cz'} + m_1R^2$ ($I_{Cz'}$ — момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через центр C платформы).

Как известно,

$$I_{Cz'} = \frac{m_1 R^2}{2},$$

тогда

$$I_z = \frac{m_1 R^2}{2} + m_1 R^2 = \frac{3m_1 R^2}{2}.$$

Следовательно,

$$K_z^{пл} = \frac{3m_1 R^2}{2}\omega. \qquad (5)$$

Для определения K_z^D обратимся к рис. Д4 г и рассмотрим движение груза D как сложное, считая его движение по платформе относительным, а вращение самой платформы вокруг оси z переносным движением. Тогда абсолютная скорость груза $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{отн} + \bar{v}_D^{пер}$. Так как груз D движется по закону $s = AD = -0{,}4t^2$, то $v_D^{отн} = \dot{s} = -0{,}8t$; изображаем вектор $v_D^{отн}$ на рис. Д4г с учетом знака $\dot{s}$. Затем, учитывая направление ω, изображаем вектор $\bar{v}_D^{пер}$ $\left(\bar{v}_D^{пер} \perp OD\right)$; численно $v_D^{пер} = \omega \cdot OD$. Тогда, по теореме Вариньона,

$$K_z^D = -m_2 v_D^{отн} \cdot 0{,}5R + m_2 v_D^{пер} \cdot OD = -m_2 v_D^{отн}\, 0{,}5R + m_2 \omega \cdot OD^2 \qquad (6)$$

Но на рис. Д4г видно, что

$$OD^2 = OE^2 + ED^2 = (R - s)^2 + (0{,}5R)^2 = \left(R - 0{,}4t^2\right)^2 + 0{,}25R^2 =$$
$$= 1{,}25R^2 - 0{,}8Rt^2 + 0{,}16t^4.$$

Подставляя эту величину в равенство (6), а затем значения K_z^D и $K_z^{пл}$ из (6) и (5) в равенство (4), получим с учетом данных задачи

$$K_z = \frac{3m_1 R^2}{2}\omega - 0.4m_2 R\, t + m_2\left(1{,}25R^2 - 0{,}8Rt^2 + 0{,}16t^4\right)\omega \qquad (7)$$

Тогда уравнение (3) примет вид

$$\left[\frac{3m_1 R^2}{2} + m_2\left(1{,}25R^2 - 0{,}8Rt^2 + 0{,}16t^4\right)\right]\omega - 0{,}4m_2 R\, t = M\, t + C_1 \qquad (8)$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при $t = 0$, $\omega = \omega_0 = 10c^{-1}$. Получим $C_1 = 662{,}4$ кг·м²/с. При этом значении C_1 из уравнения (8) находим искомую зависимость ω от t.

Ответ: $\omega = \dfrac{13{,}84t + 662{,}4}{66{,}24 - 7{,}68t^2 + 1{,}28t^4}$ с$^{-1}$, где t — в секундах.

Задача Д5

Механическая система состоит из грузов *1* и *2* , ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней $R_3 = 0{,}3$ м, $r_3 = 0{,}1$м и радиусом инерции относительно оси вращения $\rho_3 = 0{,}2$ м, блока *4* радиуса $R_4 = 0{,}2$ м и катка (или подвижного блока) *5* (рис. Д5.0–Д5.9, табл. Д5); тело *5* считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока *4* — равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив *3* (или на шкив и каток); участки нити параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки и ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив *3* действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Таблица Д5

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	с, Н/м	М, Н	$F = f(s)$	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(4+5s)	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	50(8+3s)	v_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5s)	v_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4s)	v_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50(7+8s)	v_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40(8+9s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60(8+5s)	v_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7s)	v_{C5}

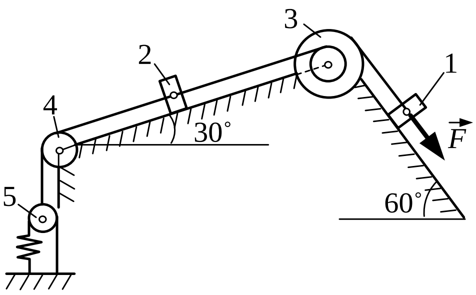


Рис. Д5.0

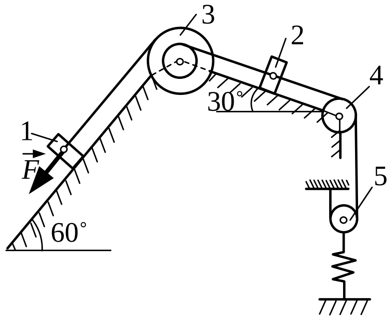


Рис. Д5.1

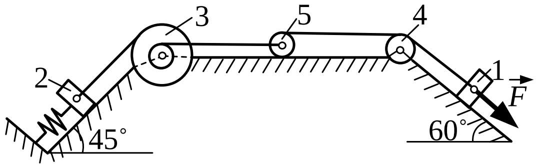


Рис. Д5.2

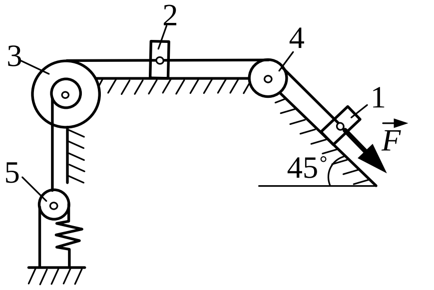


Рис. Д5.3

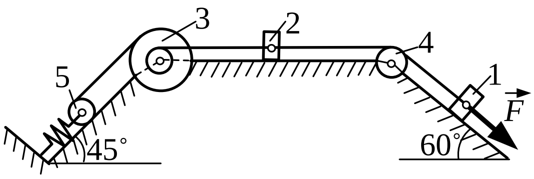


Рис. Д5.4

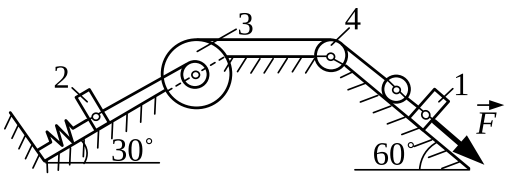


Рис. Д5.5

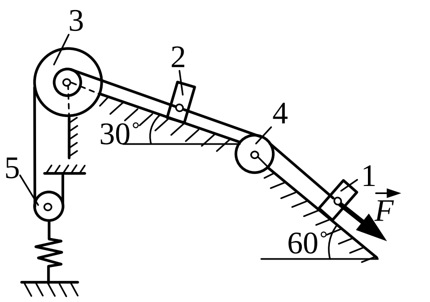


Рис. Д5.6

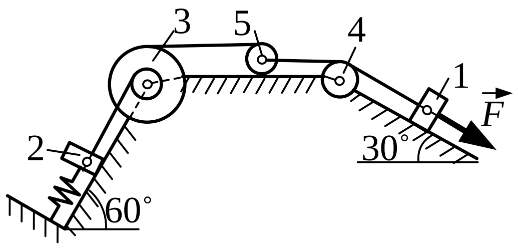


Рис. Д5.7

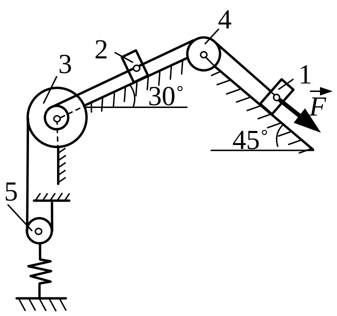


Рис. Д5.8

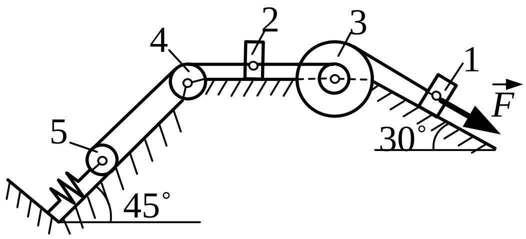


Рис. Д5.9

Определить значения искомой величины в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1=0,2 м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено: v_1, v_2, v_{C5} — скорости грузов *1, 2* и центра масс тела *5* соответственно, ω_3 и ω_4 — угловые скорости тел *3* и *4*.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток *5* на рис. Д5.2), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз *2*, если $m_2 = 0$; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Указания. Задача Д5 — на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

Пример Д5а

Механическая система (рис. Д5а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка *1*, подвижного блока *2*, ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока *4* и груза *5* (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив *3*. К центру E блока *2* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив *3* при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

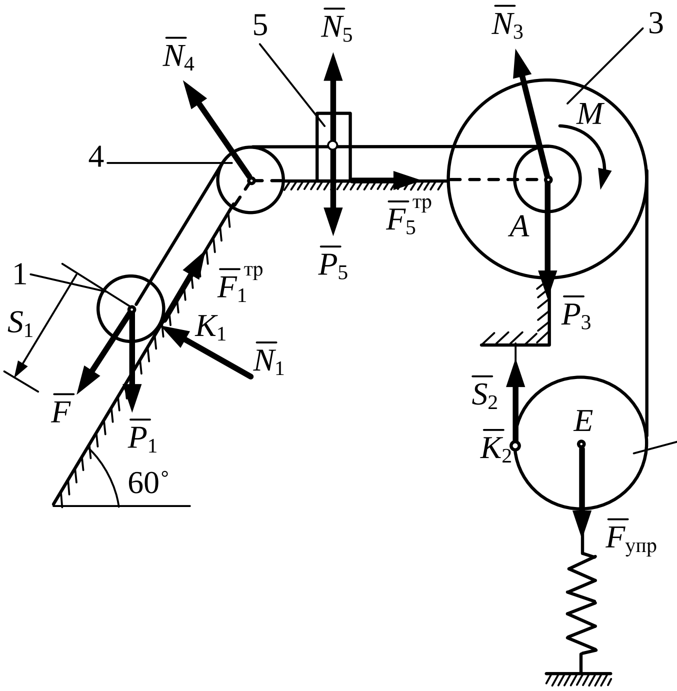


Рис. Д5а

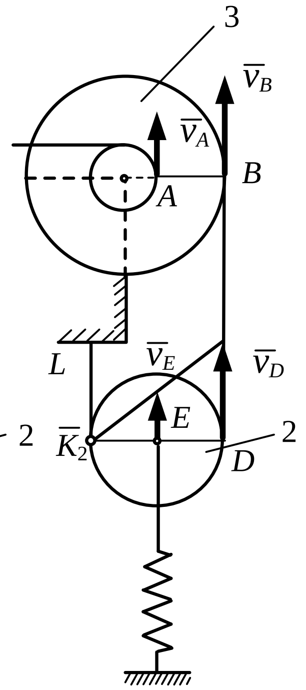


Рис. Д5б

Дано: $m_1 = 8$ кг; $m_2 = 0$ кг; $m_3 = 4$ кг; $m_4 = 0$; $m_5 = 10$ кг; $R_3 = 0{,}3$ м; $r_3 = 0{,}1$ м; $\rho_3 = 0{,}2$ м; $f = 0{,}1$; $c = 240$ Н/м; $M = 0{,}6$ Н·м; $F = 20(3+2s)$ Н; $s_1 = 0{,}2$ м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *1*, *3*, *5* и невесомых тел *2*, *4*, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\overline{F}$, $\overline{F}_{упр}$, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_5$ реакции $\overline{N}_1$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$, $\overline{N}_5$, натяжение нити $\overline{S}_2$, силы трения $\overline{F}_1^{тр}$, $\overline{F}_5^{тр}$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e \,. \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 \,. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело *1* движется плоскопараллельно, тело *5* — поступательно, а тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2 ;$$

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 ;\; T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2 \,. \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $v_{C1} = v_5 = v_A$, где A — любая точка обода радиуса r_3 шкива *3* и что точка K_1 — мгновенный центр скоростей катка *1*, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$v_{C1} = v_5 = \omega_3 r_3; \;\; \omega_1 = \frac{v_{C1}}{K_1C_1} = \frac{v_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \qquad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2; \;\; I_3 = m_3 \rho_3^2. \qquad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \qquad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда центр катка *1* пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 — перемещение груза *5* ($s_5 = s_1$), φ_3 — угол поворота шкива *3*, λ_0 и λ_1 — начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\overline{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s)ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$

$$A(\overline{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ;$$

$$A(\overline{F}_5^{\text{тр}}) = -F_5^{\text{тр}} s_5 = -fP_5 s_1;$$

$$A(M) = -M\varphi_3;$$

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы $\overline{N}_1$, $\overline{F}_{\text{тр}}^1$, $\overline{S}_2$ — мгновенные центры скоростей; точки, где приложены силы $\overline{P}_3$, $\overline{N}_3$ и $\overline{N}_4$ — неподвижны; а реакция $\overline{N}_5$ перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E — перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда так как $\omega_3 = v_A / r_3 = v_{C1} / r_3$ (равенство $v_{C1} = v_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = s_1 / r_3$.

Далее, из рис. Д5б видно, что $v_D = v_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока *2* (он как бы «катится» по участку нити K_2L) , то $v_E = 0{,}5v_D = 0{,}5\omega_3 R_3$; следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0{,}5\varphi_3 R_3 = 0{,}5 s_1 R_3 / r_3$. При найденных значениях φ_3 и λ_1 для суммы вычисленных работ получим

$$\sum A_k^e = 20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2 . \qquad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20\left(3s_1 + s_1^2\right) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - \frac{M}{r_3}s_1 - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1^2$$

Из последнего равенства, подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3.

Ответ: $\omega_3 = 8{,}1\,\text{c}^{-1}$.

<u>Пример Д5б</u>

Механическая система состоит из грузов *1* и *2* , ступенчатого шкива *3* с радиусами ступеней R_3, r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока *4* и катка *5* (рис. Д5 в). Коэффициент трения грузов о плоскость *f*. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив *3*; участки нити параллельны соответствующим плоскостям. К телу *5* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения *s* точки ее приложения. На шкив *3* при движении действует постоянный момент *M* сил сопротивления.

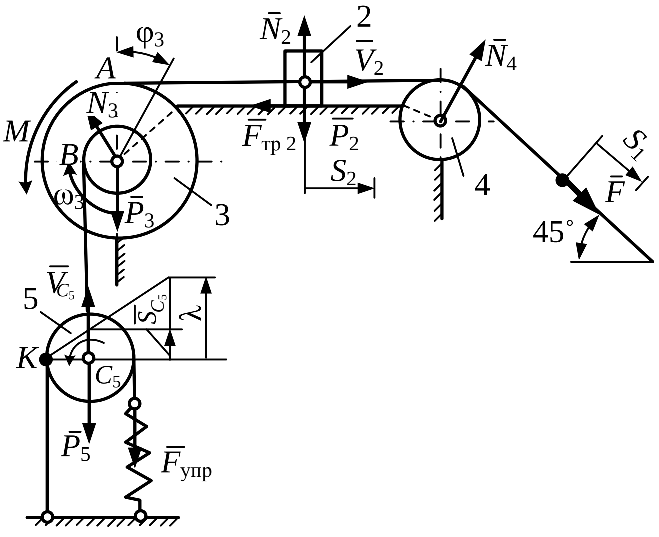


Рис. Д5в

<u>Дано</u>: $m_1 = 0$ кг; $m_2 = 6$ кг; $m_3 = 4$ кг; $m_4 = 0$; $m_5 = 5$ кг; $R_3 = 0{,}3$ м; $r_3 = 0{,}1$ м; $\rho_3 = 0{,}2$ м; $f = 0{,}1$; $c = 200$ Н/м; $M = 1{,}2$ Н·м; $F = 80(4+5s)$ Н; $s_1 = 0{,}2$ м.

<u>Определить</u>: ω_3 в тот момент времени, когда $s = s_1$.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел *2, 3, 5* и невесомых тел *1, 4*, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные $\bar{F}$, $\bar{F}_{\text{упр}}$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_5$ реакции $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$, натяжение нити $\bar{S}_2$, силы трения $\bar{F}_2^{\text{тр}}$ и момент M.

Для определения ω_3 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e . \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_2 + T_3 + T_5 . \qquad (2)$$

Учитывая, что тело *3* вращается вокруг неподвижной оси, тело *2* движется поступательно, а тело *5* — плоскопараллельно, получим

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 ; \;\; T_3 = \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \omega_3^2 ; \;\; T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_{C5}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_5 R_5^2}{2} \omega_5^2 . \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $v_2 = v_1 = v_A$, где A — любая точка обода радиуса R_3 шкива *3*, а $v_{C5} = v_B$, где B — любая точка обода радиуса r_3 шкива *3*. Тогда

$$v_2 = R_3 \omega_3 , \; v_{C_5} = r_3 \omega_3 , \; \omega_5 = \frac{v_{C_5}}{R_5} = \omega_3 \frac{r_3}{R_5} . \qquad (4)$$

Подставив все величины (4) в равенства (3), а затем, используя равенство (2), получим окончательно

$$T = \frac{1}{2}(m_2 R_3^2 + m_3 \rho_3^2 + m_5 r_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2)\omega_3^2 = 0{,}39\omega_3^2 . \qquad (5)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при перемещении, которое будет иметь система, когда тело *1* пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_2 — перемещение груза *2* ($s_2 = s_1$), φ_3 — угол поворота шкива *3*, λ_0 и λ_1 — начальное и конечное удлинения пружины, получим

$$A(\bar{F}) = \int_0^{s_1} 80(4+5s)ds = 80(4s_1 + 2{,}5s_1^2) ,$$

$$A(\bar{F}_{\text{тр.2}}) = -F_{\text{тр.2}} \cdot s_2 = -f m_2 g s_1 = -5{,}886 s_1 .$$

$$A(\overline{P}_5) = -P_5 s_5 = -m_5 g s_5,$$

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -\frac{1}{2} c(\lambda_1^2 - \lambda_0^2).$$

Работы остальных сил равны нулю.

По условиям задачи, $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_5$, где s_5 – перемещение конца пружины. Величины s_5 и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, так как $\omega_3 = v_A / R_3 = v_1 / R_3$ (равенство $v_1 = v_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = s_1 / R_3$.

Далее, из рис. Д5 в видно, что $v_{C5} = v_B = \omega_3 r_3 = r_3 v_1 / R_3$, следовательно, $s_5 = \lambda_1 = \dfrac{r_3}{R_3} s_1$.

При найденных значениях φ_3 и λ_1

$$A(\overline{P}_5) = -m_5 g \frac{r_3}{R_3} s_1 = -16{,}35 s_1,$$

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = -\frac{1}{2} c(2s_5)^2 = -\frac{1}{2} c\left(\frac{2r_3}{R_3} s_1^2\right) = -44{,}44 s_1^2.$$

Сумма вычисленных работ будет

$$\sum A_k^e = A(\overline{F}) + A(\overline{F}_{\text{тр.2}}) + A(\overline{P}_5) + A(\overline{F}_{\text{упр}}) = 297{,}76 s_1 + 155{,}566 s_1^2. \tag{6}$$

Подставляя выражения (5) и (6) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, придем к равенству

$$\frac{1}{2}(m_2 R_3^2 + m_3 \rho_3^2 + m_5 r_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2)\omega_3^2 = 297{,}76 s_1 + 155{,}566 s_1^2 \tag{7}$$

Подставив числовое значение s_1 в равенство (7), найдем искомую угловую скорость ω_3.

Ответ: $\omega_3 = \sqrt{\dfrac{297{,}76 s_1 + 155{,}566 s_1^2}{0{,}39}} = 13{,}03 c^{-1}$.

Задача Д6

Вертикальный вал *AK* (рис. Д6.0–Д6.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\ \text{с}^{-1}$, закреплен подпятником в точке *A* и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в таблице Д6 в столбце 2 (*AB* = *BD* = *DE* = *EK* = *a*). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой *m* = 10 кг, состоящий из частей *1* и *2* (размеры частей стержня показаны на рисунках, где b = 0,1м, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой m_3 = 3 кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α, β, γ, φ даны в столбцах 5–8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять a = 0,6 м.

Указания. Задача Д6 — на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\bar{R}^{\text{и}}$, то численно $R^{\text{и}} = ma_C$, где a_C — ускорение центра масс C тела, но линия действия силы $\bar{R}^{\text{и}}$ в общем случае не проходит через точку C (см. пример Д6).

Таблица Д6

Номер условия	Подшипник в точке	Крепление в точке		α, град	β, град	γ, град	φ, град
		ломаного стержня	невесомого стержня		рис. 0–4	рис. 5–9	
0	B	D	K	45	135	225	60
1	K	B	D	60	240	150	45
2	K	E	B	30	210	120	60
3	D	K	B	60	150	240	30
4	K	D	E	30	120	210	60
5	E	B	K	45	225	135	60
6	E	D	K	60	60	150	30
7	K	B	E	30	30	120	60
8	D	E	K	60	150	60	30
9	E	K	D	30	120	210	60

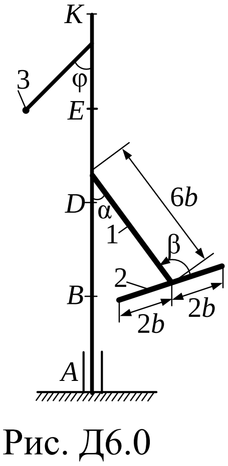


Рис. Д6.0

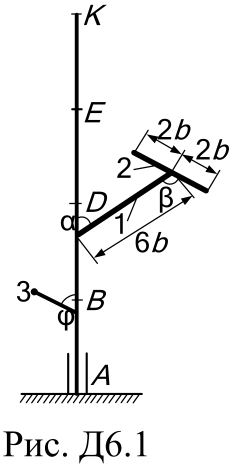


Рис. Д6.1

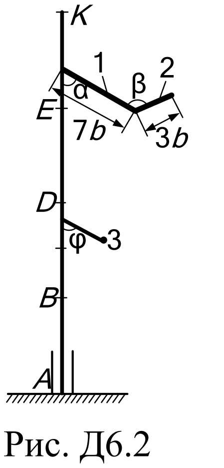


Рис. Д6.2

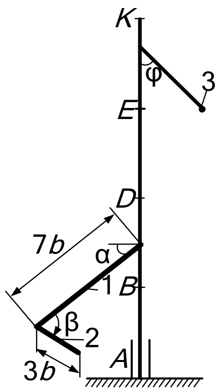


Рис. Д6.3

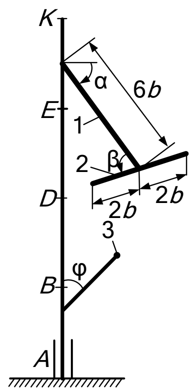


Рис. Д6.4

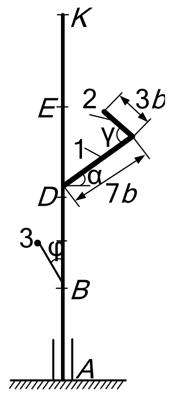


Рис. Д6.5

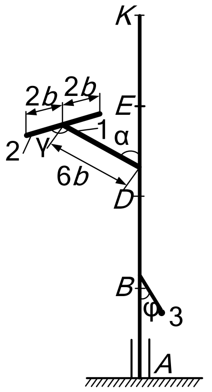


Рис. Д6.6

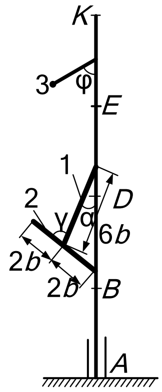


Рис. Д6.7

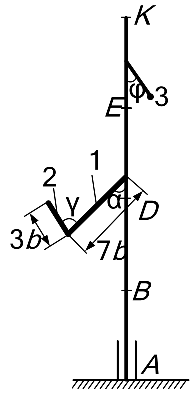


Рис. Д6.8

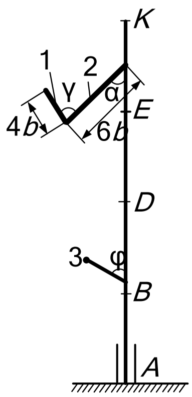


Рис. Д6.9

Пример Д6а

Вертикальный вал длиной $3a$ ($AB = BD = DE = a$), закрепленный подпятником A и подшипником D (рис. Д6а), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке E ломаный однородный стержень массой m и длиной $10\ b$, состоящий из двух частей *1* и *2*, а в точке B прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: $\omega = 8\text{с}^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг; $m_3 = 2$ кг; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 150^\circ$; $\varphi = 60^\circ$; $a = 0{,}3$ м; $b = 0{,}1$ м.

Определить: реакции подпятника A и подшипника D , пренебрегая весом вала.

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках B и E стержни (рис. Д6б). Массы и веса частей *1* и *2* ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны m_1 = 0,6m; m_2 = 0,4m;

$$P_1 = 0{,}6mg\,;\; P_2 = 0{,}4mg\,;\; P_3 = m_3 g\,. \qquad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Axy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы — силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и реакции связей — составляющие реакции подпятника $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\overline{R}_D$.

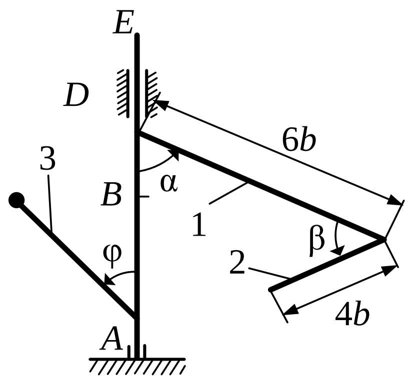


Рис. Д6а

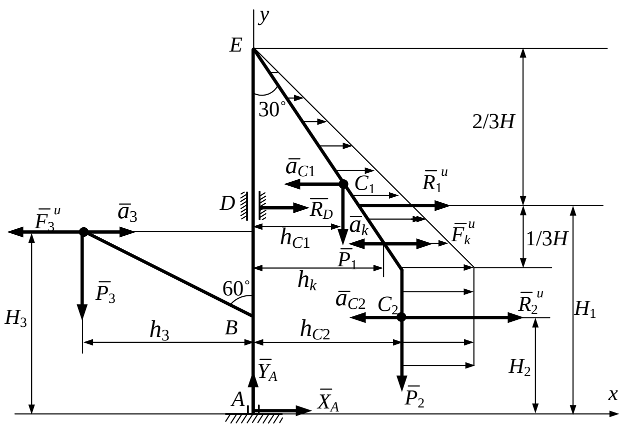


Рис. Д6а

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\overline{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k — расстояние элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\overline{F}_k^и$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^и = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k — масса элемента. Так как все $F_k^и$ пропорциональны h_k, то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части *1* треугольник, а для части *2* — прямоугольник (рис. Д6б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^{и} = ma_C$, где m — масса тела, a_C — ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^{и} = m_1 a_{C1},\; R_2^{и} = m_2 a_{C2}\,. \qquad (2)$$

Сила инерции точечной массы *3* должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3^{и} = m_3 a_3\,. \qquad (3)$$

Ускорения центров масс частей *1* и *2* стержня и груза *3* равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1},\; a_{C2} = \omega^2 h_{C2},\; a_3 = \omega^2 h_3, \qquad (4)$$

где h_{C1}, h_{C2} — расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 — соответствующее расстояние груза:

$$\begin{aligned} &h_{C1} = 3b\sin 30^\circ = 0{,}15\,\text{м},\\ &h_{C2} = 6b\sin 30^\circ = 0{,}3\,\text{м},\\ &h_3 = l\sin 60^\circ = 5b\sin 60^\circ = 0{,}43\,\text{м}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учтя (5), получим числовые значения $R_1^{и}$, $R_2^{и}$ и $F_3^{и}$:

$$\begin{aligned} &R_1^{и} = 0{,}6m\omega^2 h_{C1} = 57{,}6\,\text{Н},\\ &R_2^{и} = 0{,}4m\omega^2 h_{C2} = 76{,}8\,\text{Н},\\ &F_3^{и} = m_3\omega^2 h_3 = 55{,}0\,\text{Н}. \end{aligned} \qquad (6)$$

При этом линии действия равнодействующих $\overline{R}_1^{и}$ и $\overline{R}_2^{и}$ пройдут через центры тяжести соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия $\overline{R}_1^{и}$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника *E*, где $H = 6b\cos 30^\circ$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим:

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0;\; X_A + R_D + R_1^{и} + R_2^{и} - F_3^{и} = 0;\\ &\sum F_{ky} = 0;\; Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0;\\ &\sum m_A\left(\overline{F}_k\right) = 0;\; -R_D\cdot 2a - P_1 h_{C1} + P_2 h_{C2} + P_3 h_3 - R_1^{и} H_1 - R_2^{и} H_2 + F_3^{и} H_3 = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

где H_1, H_2, H_3 — плечи сил $\overline{R}_1^{и}$, $\overline{R}_2^{и}$, $\overline{F}_3^{и}$ относительно точки *A*, равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b\cos 30^\circ = 0{,}52\,\text{м}$)

$$H_1 = 3a - (2/3)H = 0{,}55\text{ м},$$
$$H_2 = 3a - (H + 2b) = 0{,}18\text{ м}, \qquad (8)$$
$$H_3 = a + l\cos 60^\circ = 0{,}55\text{ м}.$$

Подставив в уравнения (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (8) и решив эту систему уравнений (7), найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33{,}7$ Н; $Y_A = 117{,}7$ Н; $R_D = -45{,}7$ Н.

<u>Пример Д6б</u>

Вертикальный вал длиной $4a$ ($AB=BD=a$, $KD=2a$) , закрепленный подпятником A и подшипником B (рис. Д6в), вращается с постоянной угловой скоростью ω. К валу жестко прикреплен в точке D ломаный однородный стержень массой m и длиной $10\,b$, состоящий из двух частей *1* и *2*, а в точке K прикреплен невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой m_3 на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

<u>Дано</u>: $\omega = 10\text{ с}^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг; $m_3 = 3$ кг; $\alpha = 45^\circ$; $\gamma = 225^\circ$; $\varphi = 60^\circ$; $a = 0{,}6$ м; $b = 0{,}1$ м.

<u>Определить</u>: реакции подпятника A и подшипника D, пренебрегая весом вала.

Решение. 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках D и K стержни (рис. Д6г). Массы и веса частей *1* и *2* ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны

$$m_1 = DLm = 7bm = 7\text{ кг},\ m_2 = LTm = 3bm = 3\text{ кг};$$

$$P_1 = m_1 g = 68.6;\ P_2 = m_2 g = 29.4;\ P_3 = m_3 g = 29.4. \qquad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Axy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы — силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и реакции связей — составляющие реакции подпятника $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\overline{R}_B$.

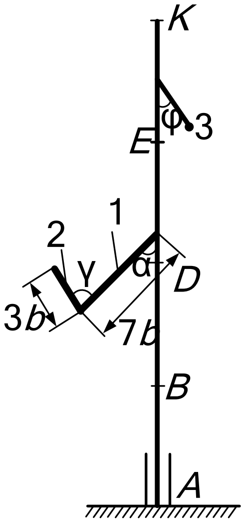


Рис. Д6в

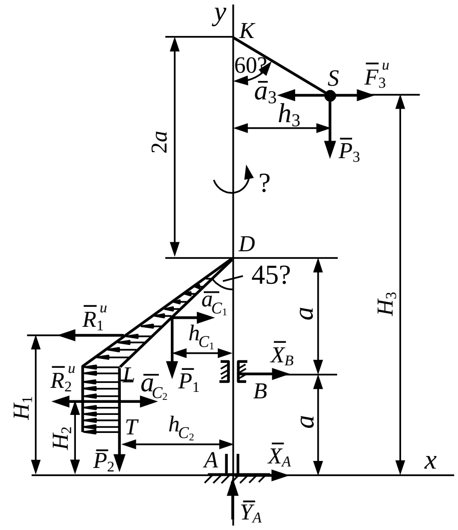


Рис. Д6г

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k — расстояние элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\bar{F}_k^{\text{и}}$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^{\text{и}} = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где Δm_k — масса элемента. Так как все $F_k^{\text{и}}$ пропорциональны h_k, то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части *1* треугольник, а для части *2* — прямоугольник (рис. Д6г).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^{\text{и}} = ma_C$, где m — масса тела, a_{C} — ускорение его центра масс, то для частей ломаного стержня соответственно получим

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_{C1},\ R_2^{\text{и}} = m_2 a_{C2}. \qquad (2)$$

Сила инерции точечной массы *3* должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3^{\text{и}} = m_3 a_3. \qquad (3)$$

Ускорения центров масс частей *1* и *2* стержня и груза *3* равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1},\ a_{C2} = \omega^2 h_{C2},\ a_3 = \omega^2 h_3, \qquad (4)$$

где h_{C_1}, h_{C_2} — расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 — соответствующее расстояние груза:

$$h_{C1} = \frac{DL}{2}\sin 45^\circ = \frac{7b}{2}\sin 45^\circ = \frac{7\cdot 0{,}1}{2}\sin 45^\circ = 0{,}25\ \text{м},$$

$$h_{C2} = DL\sin 45^\circ = 7b\sin 45^\circ = 7\cdot 0{,}1\sin 45^\circ = 0{,}50\ \text{м}, \qquad (5)$$

$$h_3 = KS\sin 60^\circ = 4b\sin 60^\circ = 4\cdot 0{,}1\sin 60^\circ = 0{,}35\ \text{м}.$$

Тогда ускорения центров масс частей *1* и *2* стержня и груза *3* будут равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1} = 10^2\cdot 0{,}25 = 25\ \text{м/с}^2,$$

$$a_{C2} = \omega^2 h_{C2} = 10^2\cdot 0{,}50 = 50\ \text{м/с}^2, \qquad (6)$$

$$a_3 = \omega^2 h_3 = 10^2\cdot 0{,}35 = 35\ \text{м/с}^2$$

Подставив в (2) и (3) значения (1) и (6), получим числовые значения $R_1^{\text{и}}$, $R_2^{\text{и}}$ и $F_3^{\text{и}}$:

$$R_1^{\text{и}} = m_1 a_{C1} = 7\cdot 25 = 175\ \text{Н},$$

$$R_2^{\text{и}} = m_2 a_{C2} = 3\cdot 50 = 150\ \text{Н}, \qquad (7)$$

$$F_3^{\text{и}} = m_3 a_3 = 3\cdot 35 = 105\ \text{Н}.$$

При этом линии действия равнодействующих $\overline{R}_1^{\text{и}}$ и $\overline{R}_2^{\text{и}}$ пройдут через центры тяжести соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия $\overline{R}_1^{\text{и}}$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника D, где $H = 7b\cos 45^\circ$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_A + X_B - R_1^{u} - R_2^{u} + F_3^{u} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0, \qquad (8)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0;\ -X_B a + P_1 h_{C1} - P_3 h_3 + R_1^{u} H_1 + R_2^{u} H_2 - F_3^{u} H_3 = 0.$$

где H_1, H_2, H_3 — плечи сил $\overline{R}_1^{\text{и}}$, $\overline{R}_2^{\text{и}}$, $\overline{F}_3^{\text{и}}$ относительно точки A, равные (при подсчетах учтено, что $H = 7b\cos 45^\circ = 0{,}49$ м)

$$H_1 = 2a - (2/3)H = 2a - \frac{2}{3}0{,}49 = 0{,}87\ \text{м},$$

$$H_2 = 2a - H - \frac{LT}{2} = 2a - 0.49 - 1{,}5b = 0{,}55\ \text{м}, \qquad (9)$$

$$H_3 = 4a - KS\cos 60^\circ = 2{,}20\ \text{м}.$$

Подставив в уравнения (8) соответствующие величины из равенств (1), (5), (7), (9) и решив эту систему уравнений (8), найдем искомые реакции:

$$Y_A = P_1 + P_2 + P_3 = g(m_1 + m_2 + m_3) = 127{,}4H,$$

$$X_B = \frac{P_1h_{C1} + P_2h_{C2} - P_3h_3 + R_1^u H_1 + R_2^u H_2 - F_3^u H_3}{a} = 42{,}18H\ ,$$

$$X_A = -X_B + R_1^u + R_2^u - F_3^u = 177{,}82H\ .$$

Ответ: X_A= 177.82 Н; Y_A = 127,4 Н; X_B= 42.18 Н.

Задача Д7

Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, находится под действием приложенных сил в равновесии; положение равновесия определяется углами α, β, γ, φ, θ (рис. Д7.0–Д7.9, табл. Д7а и Д7б). Длины стержней механизма (кривошипов) равны: l_1 = 0,4 м, l_4 = 0,6 м (размеры l_2 и l_3 произвольны); точка E находится в середине соответствующего стержня.

На ползун B механизма действует сила упругости пружины $\overline{F}$; численно $F = c\lambda$, где c — коэффициент жесткости пружины, λ — её деформация. Кроме того, на рис. 0 и 1 на ползун D действует сила $\overline{Q}$, а на кривошип O_1A — пара сил с моментом M; на рис. 2–9 на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2.

Определить, чему равна при равновесии деформация λ пружины, и указать, растянута пружина или сжата. Значения всех заданных величин приведены в таблице Д7а для рис. 0–4 и в таблице Д7б для рис. 5–9, где Q выражено в ньютонах, а M, M_1, M_2 — в ньютонометрах.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; для большей наглядности ползун с направляющими и пружину изобразить так, как в примере Д7 (см. рис. Д7, а также рис. Д7.10б). Если на чертеже решаемого варианта задачи прикрепленный к ползуну B стержень окажется совмещенным с пружиной (как на рис. Д7.10а), то пружину следует считать прикрепленной к ползуну с другой стороны (как на рис. Д7.10б, где одновременно иначе изображены направляющие).

Указания. Задача Д7 — на определение условий равновесия механической системы с помощью принципа возможных перемещений. Механизм в рассматриваемой задаче имеет одну степень свободы, т.е. одно независимое возможное перемещение. Для решения задачи нужно сообщить механизму возможное перемещение, вычислить сумму элементарных работ всех действующих активных сил и пар на этом перемещении и приравнять ее нулю. Все вошедшие в составленное уравнение возможные перемещения следует выразить через какое-нибудь одно.

Чтобы найти λ, надо из полученного условия равновесия определить силу упругости F. На чертеже эту силу можно направить в любую сторону (т.е. считать пружину или растянутой, или сжатой); верно ли выбрано направление силы, укажет знак.

Таблица Д7а (к рис. Д7.0–Д7.4)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	для рис.0–1		для рис.2–4	
	α	β	γ	φ	θ		M	Q	M_1	M_2
0	90	120	90	90	60	180	100	400	120	460
1	60	150	30	90	30	160	120	380	140	440
2	30	120	120	0	60	150	140	360	160	420
3	0	60	90	0	120	140	160	340	180	400
4	30	120	30	0	60	130	180	320	200	380
5	0	150	30	0	60	120	200	300	220	360
6	0	150	90	0	120	110	220	280	240	340
7	90	120	120	90	150	100	240	260	260	320
8	60	60	60	90	30	90	260	240	280	300
9	120	30	30	90	150	80	280	220	300	280

Таблица Д7б (к рис.Д7.5–Д7.9)

Номер условия	Углы, град					c, Н/см	M_1	M_2
	α	β	γ	φ	θ			
0	30	30	60	0	150	80	200	340
1	0	60	60	0	120	90	220	320
2	60	150	120	90	30	100	240	300
3	30	60	30	0	120	110	260	280
4	90	120	150	90	30	120	280	260
5	30	120	150	0	60	130	300	240
6	60	150	150	90	30	140	320	220
7	0	60	30	0	120	150	340	200
8	90	120	120	90	60	160	360	180
9	90	150	120	90	30	180	380	160

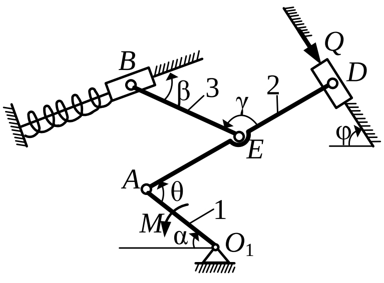


Рис. Д7.0

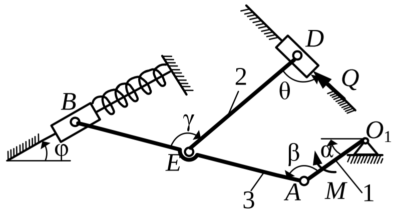


Рис. Д7.1

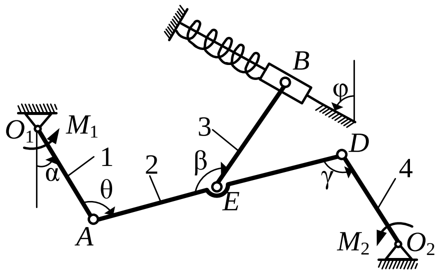


Рис. Д7.2

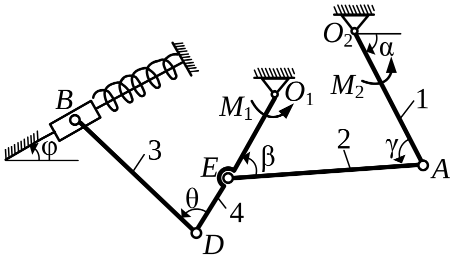


Рис. Д7.3

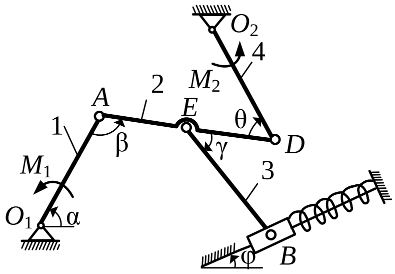


Рис. Д7.4

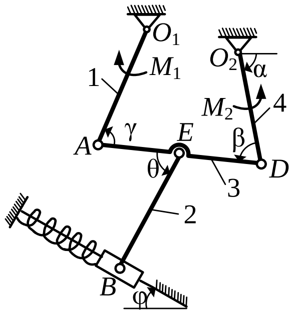


Рис. Д7.5

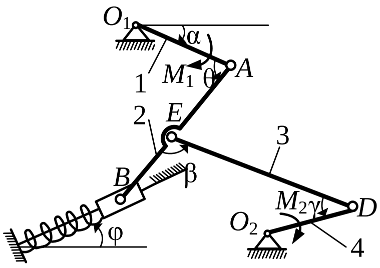


Рис. Д7.6

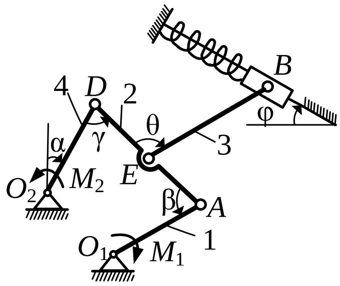


Рис. Д7.7

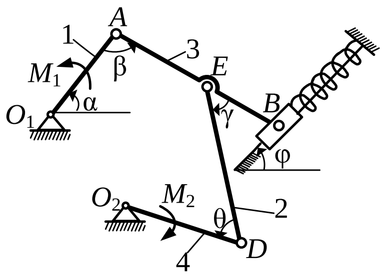


Рис. Д7.8

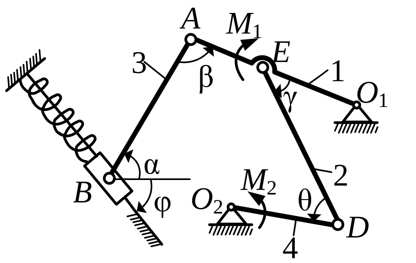


Рис. Д7.9

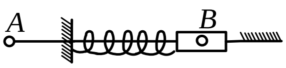


Рис. Д7.10 а

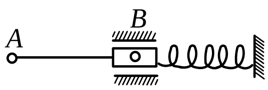
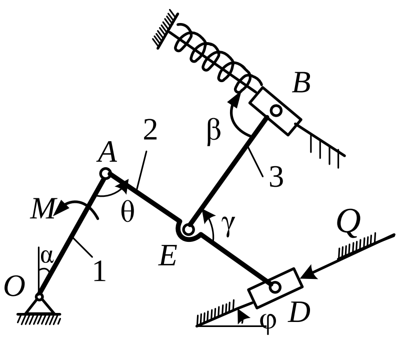


Рис. Д7.10 б

Пример Д7а

Механизм (рис. Д7 а), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней *1, 2, 3* и ползунов *B*, *D*, соединенных друг с другом и с неподвижной опорой *O* шарнирами. К ползуну *B* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*, к ползуну *D* приложена сила $\overline{Q}$, а к стержню *1* (кривошипу) — пара сил с моментом *M*.



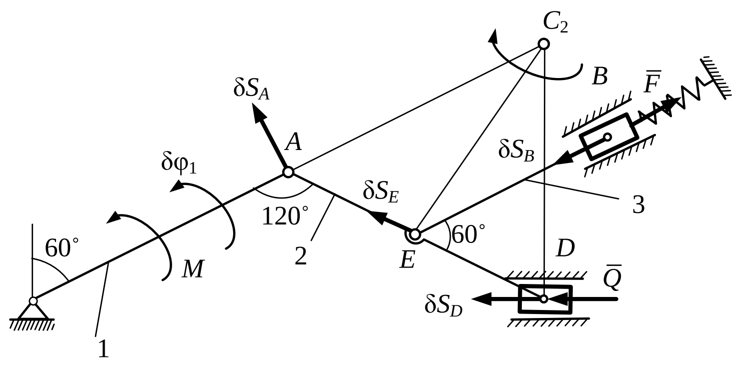


Рис. Д7а Рис. Д7б

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $\theta = 120^\circ$, $l_1 = 0{,}4$ м, AE=ED, $c = 125$ Н/см, $M = 150$ Н·м, $Q = 350$ Н.

Определить: деформацию λ пружины при равновесии механизма.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. Д7 б); при этом согласно последнему из указаний к задаче Д7 прикрепляем пружину к ползуну с другой стороны (так, как если бы было $\beta = 180^\circ$). Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\sum \delta A_k = 0, \qquad (1)$$

где δA_k — элементарные работы активных сил на соответствующих возможных перемещениях. Изображаем действующие на механизм активные силы: силу $\overline{Q}$, силу упругости $\overline{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пару с моментом *M*. Неизвестную силу *F* найдем с помощью уравнения (1), а зная *F* и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ — поворот стержня *1* вокруг оси *O*, δs_D и δs_B — перемещения ползунов (точек) *D* и *B*.

Из перемещений $\delta\varphi_1$, δs_D и δs_B, независимое от других — одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, каким тогда будут δs_D и δs_B, выразив их через $\delta\varphi_1$; при этом важно верно определить и направления δs_D и δs_B, так как иначе в уравнении (1) будут ошибки в знаках.

При расчетах учтем, что зависимость между возможными перемещениями здесь такая же, как между соответствующими скоростями звеньев механизма при его движении и воспользуемся известными из кинематики соотношениями (ход расчетов такой же, как в примере К3 в книге 1 «Кинематика»).

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$); получим

$$\delta s_A = \delta\varphi_1 \cdot l_1;\ \delta s_A \perp OA. \qquad (2)$$

Теперь определим и изобразим δs_D, учитывая, что проекции δs_D и δs_A на прямую AD должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули знаки). Тогда

$$\delta s_D \cos 30^\circ = \delta s_A \cos 30^\circ \text{ и } \delta s_D = \delta s_A - \delta\varphi_1 l_1. \qquad (3)$$

Чтобы определить δs_B, найдем сначала δs_E. Для этого построим мгновенный центр вращения (скоростей) C_2 стержня *2* (на пересечении перпендикуляров к δs_A и δs_D, восставленных из точек A и D) и покажем направление поворота стержня *2* вокруг C_2, учтя направление δs_A или δs_D. Так как $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60^\circ$, то ΔAC_2D — равносторонний и C_2E в нем высота, поскольку $AE = ED$. Тогда перемещение δs_E, перпендикулярное C_2E, будет направлено по прямой EA (при изображении δs_E учитываем направление поворота вокруг центра C_2). Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_E и δs_A на прямую EA должны быть равны друг другу, получим (значение δs_E можно найти и составив соответствующую пропорцию)

$$\delta s_E = \delta s_A \cos 30^\circ = l_1\, \delta\varphi_1 \cos 30^\circ. \qquad (4)$$

Наконец, из условия равенства проекций δs_B и δs_E на прямую BE находим и изображаем δs_B. Численно

$$\delta s_B = \delta s_E \cos 60^\circ = l_1\, \delta\varphi_1 \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0{,}43\, l_1\, \delta\varphi_1. \qquad (5)$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1); получим

$$\mathrm{M}\,\delta\varphi_1 + Q\, \delta s_D - \mathrm{F}\,\delta s_B = 0, \qquad (6)$$

или, заменяя здесь δs_D и δs_B их значениями (3) и (5) и вынося одновременно $\delta\varphi_1$ за скобки,

$$(M + l_1 Q - 0{,}43 l_1 F)\delta\varphi_1 = 0. \qquad (7)$$

Так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M + l_1 Q - 0{,}43 l_1 F = 0. \qquad (8)$$

Из уравнения (8) находим значение F и определяем $\lambda = F/c$.

Ответ: $\lambda = 13{,}5$ см. Знак указывает, что пружина, как и предполагалось, растянута.

<u>Пример Д7б</u>

Механизм (рис. Д7 в), расположенный в горизонтальной плоскости, состоит из стержней *1*, *2*, *3* и ползуна *B*, соединенных друг с другом и с неподвижными опорой O_1 и O_2 шарнирами. К ползуну *B* прикреплена пружина с коэффициентом жесткости *c*, на кривошипы O_1A и O_2D действуют пары сил с моментами M_1 и M_2.

<u>Дано</u>: $\alpha = 90^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $\varphi = 0^\circ$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_4 = 0{,}6$ м, $AE=ED$, $c = 180$ Н/м, $M_1 = 120$ Н·м, $M_2 = 460$ Н·м.

<u>Определить</u>: деформацию λ пружины при равновесии механизма.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. Д7 б). Для решения задачи воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому сумма элементарных работ всех активных сил равна нулю на любом возможном перемещении системы.

$$\sum \delta A_k = 0. \qquad (1)$$

Изображаем действующие на механизм активные силы: силу упругости $\overline{F}$ пружины (предполагая, что пружина растянута) и пары сил с моментами M_1 и M_2. Неизвестную силу *F* найдем с помощью уравнения (1), а зная *F* и учитывая, что $F = c\lambda$, определим λ.

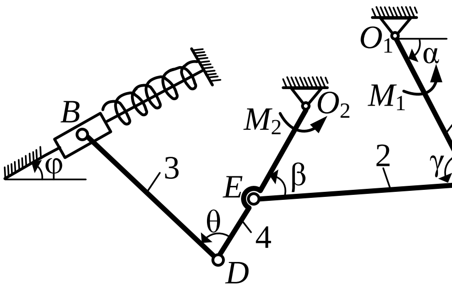


Рис. Д7в

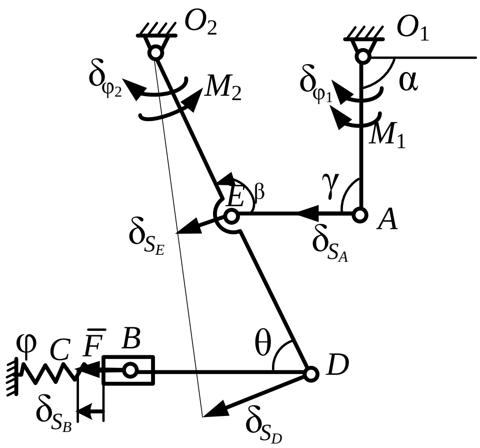


Рис. Д7г

2. Чтобы составить уравнение (1), сообщим механизму возможное перемещение и введем следующие обозначения для перемещений звеньев, к которым приложены активные силы: $\delta\varphi_1$ — поворот стержня *1* вокруг оси O_1, $\delta\varphi_2$ — поворот стержня *4* вокруг оси O_2 и δs_B — перемещение точки *B*. Из перемещений $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ и δs_B, независимое от других — одно (у механизма одна степень свободы). Примем за независимое возможное перемещение $\delta\varphi_1$ и установим, каким тогда будут $\delta\varphi_2$ и δs_B, выразив их через $\delta\varphi_1$; при этом важно верно определить и направления $\delta\varphi_2$ и δs_B.

Сначала найдем и изобразим δs_A (направление δs_A определяется направлением $\delta\varphi_1$); получим

$$\delta s_A = \delta\varphi_1 \cdot l_1;\ \delta s_A \perp O_1 A. \tag{2}$$

Теперь определим и изобразим δs_E, учитывая, что проекции δs_E и δs_A на прямую *AE* должны быть равны друг другу (иметь одинаковые модули знаки). Тогда

$$\delta s_A = \delta s_E \cos 30^\circ \text{ и } \delta S_E = \frac{\delta S_A}{\cos 30^\circ} = \frac{l_1 \cdot \delta\varphi_1}{\cos 30^\circ}. \tag{3}$$

Определим перемещение δs_D

$$\delta S_D = 2\delta S_E = 2\frac{l_1 \cdot \delta\varphi_1}{\cos 30^\circ} \text{ или } \delta S_D = l_4 \delta\varphi_2 \tag{4}$$

Из (4) выразим $\delta\varphi_2$

$$\delta\varphi_2 = \frac{2l_1 \cdot \delta\varphi_1}{l_4 \cdot \cos 30^\circ}. \tag{5}$$

Воспользовавшись опять тем, что проекции δs_B и δs_D на прямую *CD* должны быть равны друг другу, получим

$$\delta S_B = \delta S_D \cdot \cos 30^\circ, \quad \delta S_B = 2l_1 \cdot \delta \cdot \varphi_1 = 0{,}8\delta\varphi_1 \tag{6}$$

3. Теперь составляем для механизма уравнение (1); получим

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 + F\delta S_B = 0 \tag{7}$$

или, заменяя здесь $\delta\varphi_2$ и δs_B их значениями (5) и (6) и вынося $\delta\varphi_1$ за скобки, получим

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\frac{2l_1 \cdot \delta\varphi_1}{l_4 \cos 30^\circ} + c\lambda \cdot 0{,}8\,\delta\varphi_1 = 0$$

$$(M_1 - 2M_2\frac{l_1}{l_4 \cos 30^\circ} + 0{,}8\,c\lambda)\delta\varphi_1 = 0$$

Так как $\delta\varphi_1 \neq 0$, то отсюда следует, что

$$M_1 - 2M_2\frac{l_1}{l_4 \cos 30^\circ} + 0{,}8\,c\lambda = 0. \tag{8}$$

Из уравнения (8) находим значение $F = c\lambda$ и определяем $\lambda = F/c$:

$$\lambda = \frac{-M_1 + 2M_2\dfrac{l_1}{l_4 \cos 30^\circ}}{0{,}8c} = 0{,}04\textit{м}\ \ (\lambda = 4{,}08 \text{ см}).$$

Ответ: Деформация пружины равна $\lambda = 0{,}04$ см.

Задача Д8

Механическая система состоит из тел *1*, *2*, ..., *5* весом P_1, P_2, ..., P_5 соответственно, связанных друг с другом нитями, намотанными на ступенчатые блоки *1* и *2* (рис. Д8.0–Д8.9, табл. Д8). Радиусы ступенчатых блоков *1* и *2* равны соответственно $R_1 = R$, $r_1 = 0{,}4R$, $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}8R$. При вычислении моментов инерции все блоки, катки и колеса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса R.

На систему кроме сил тяжести действует сила $\overline{F}$, приложенная к телу *3* или *4* (если тело *3* в систему не входит, сила приложена в точке *B* к тележке), и пары сил с моментами M_1, M_2, приложенные к блокам *1* и *2*; когда $M < 0$, направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке нити, указанном в таблице в столбце «Пружина», включена пружина с коэффициентом жесткости *c* (например, если в столбце стоит *AB*, то участок *AB* является пружиной, если *AD*, то *AD* — пружина и т.д.); в начальный момент времени пружина не деформирована.

Составить для системы уравнения Лагранжа и найти закон изменения обобщенной координаты *x*, т.е. $x = f(t)$, считая, что движение начинается из состояния покоя; определить также частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении (о выборе координаты *x* см. «Указания»).

Прочерк в столбцах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать), а ноль — что тело считается невесомым, но в систему входит; для колес, обозначенных номером *4*, P_4 — их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается).

Указания. Задача Д8 — на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет две степени свободы; следовательно, её положение определяется двумя обобщенными координатами q_1 и q_2 и для нее должны быть составлены два уравнения.

Таблица Д8

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	M_1	M_2	Пружина
0	4P	0	–	3P	–	4P	0	0	AB
1	0	2P	–	–	3P	0	0	–2PR	KE
2	0	2P	–	P	–	0	2PR	0	AB
3	–	0	2P	5P	–	0	0	2PR	BD
4	P	–	–	–	4P	0	–PR	0	KE

Номер условия	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	F	M_1	M_2	Пружина
5	–	–	4P	3P	–	P	0	0	BD
6	2P	0	–	–	P	0	0	–PR	KE
7	–	4P	–	2P	–	3P	0	2PR	AB
8	–	4P	2P	0	–	0	0	3PR	BD
9	2P	0	–	P	–	0	2PR	0	AB

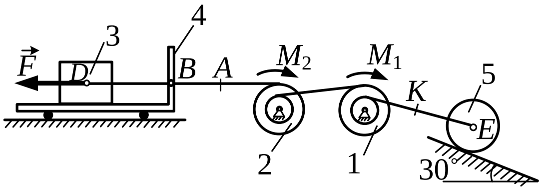


Рис. Д8.0

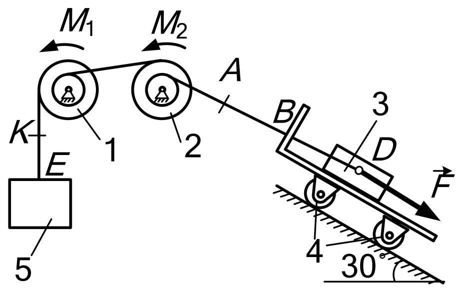


Рис. Д8.1

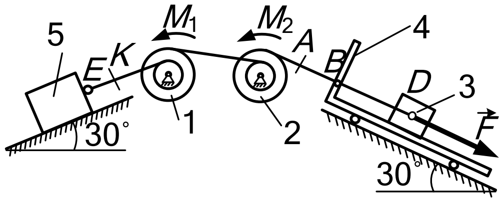


Рис. Д8.2

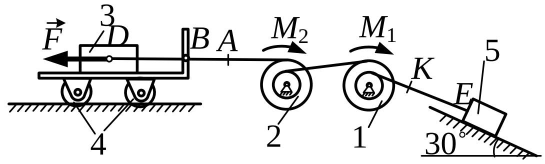


Рис. Д8.3

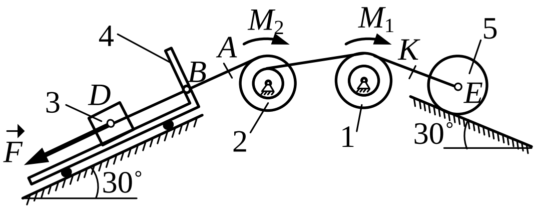


Рис. Д8.4

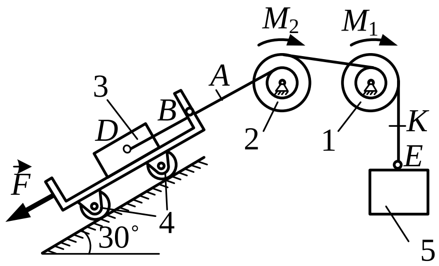


Рис. Д8.5

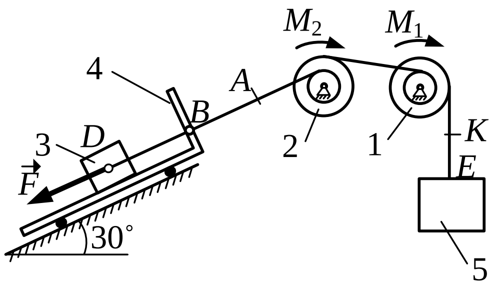


Рис. Д8.6

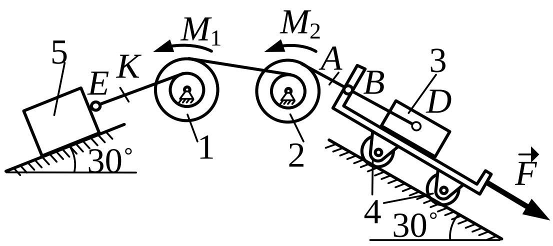


Рис. Д8.7

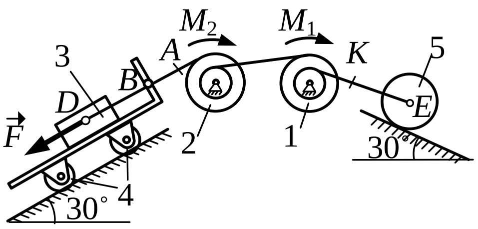


Рис. Д8.8

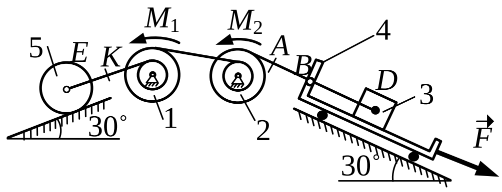


Рис. Д8.9

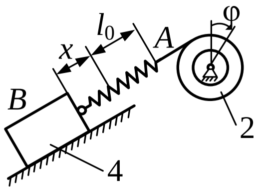


Рис. Д8.10а

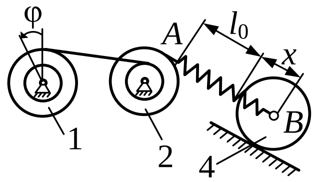


Рис. Д8.10б

Решение начать с выбора обобщенных координат, обозначив их $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$ или $q_1 = x$ и $q_2 = y$. За координату x принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону того из тел *3, 4* или *5* системы, к которому пружина прикреплена; например, если пружина прикреплена к этому телу в точке B и ее длина в произвольный момент времени равна AB, то $x = AB - l_0$, где l_0 — длина недеформированной пружины. За координату φ принять угол поворота крайнего блока (этот блок может быть и невесомым), отсчитывая φ от начального положения. Если в систему ни один блок не входит, а входят лишь тела *3* и *4*, за координату y принять расстояние тела *4* от начального положения. Соответствующие примеры даны на рис. Д8.10 Дальнейший ход решения разъяснен в примерах Д8а и Д8б.

Пример Д8а

Механическая система (рис. Д8 а) состоит из барабана *1* радиуса R, к которому приложена пара сил с моментом M, тележки *2* и катка *3* (барабан и каток — однородные цилиндры); веса всех тел равны соответственно P_1, P_2, P_3; весом колес тележки пренебречь. Тележка соединена с барабаном намотанной на него нитью, а с катком — пружиной BD; коэффициент жесткости которой равен c. Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

Дано: R, c, $P_1 = 2P$; $P_2 = 4P$; $P_3 = 2P$; $M = 4PR$; $\alpha = 30^\circ$.

Определить: 1) $x = f(t)$, где x — удлинение пружины (или перемещение центра D катка по отношению к тележке *2*); 2) частоту k и период τ колебаний.

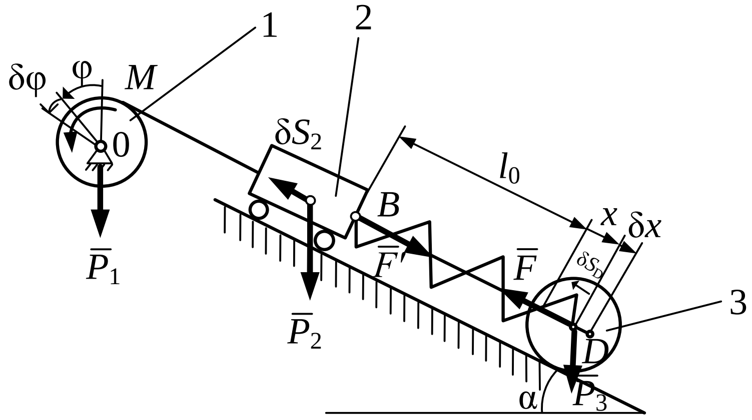


Рис. Д8а

Решение. 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение пружины x ($q_1 = \varphi,\ q_2 = x$). Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Так как барабан вращается вокруг оси O, тележка движется поступательно, а каток — плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2;\ T_2 = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g} v_2^2,\ T_3 = \frac{1}{2}\frac{P_3}{g} v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_3^2, \qquad (3)$$

где $I_0 = (P_1/2g)R^2,\ I_D = (P_3/2g)R_3^2$ (R_3 — радиус катка 3).

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$. Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\varphi},\ v_2 = R\omega_1 = R\dot{\varphi}$. Для определения v_D рассмотрим движение катка как сложное. Учитывая, что x определяет положение точки D по отношению к тележке, получим $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{\text{от}} + \bar{v}_D^{\text{пер}}$, где численно $v_D^{\text{от}} = \dot{x}$, $v_D^{\text{пер}} = v_2 = R\dot{\varphi}$. Тогда, принимая во внимание, что при возрастании φ и x скорости $\bar{v}_D^{\text{от}}$ и $\bar{v}_D^{\text{пер}}$ направлены в разные стороны и что точка E для катка — мгновенный центр скоростей, получим

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\varphi},\ \omega_3 = \frac{v_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R_3}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей и значения I_0 и I_D в равенства (3) и учитывая, что $P_1 = P_3 = 2P$, а $P_2 = 4P$, получим окончательно из (2) следующее выражение для T:

$$T = \frac{P}{g}\left(4R^2\dot{\varphi}^2 - 3R\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2\right). \qquad (4)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g}\left(8R^2\dot{\varphi} - 3R\dot{x}\right),\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g}\left(-3R\dot{\varphi} - 3\dot{x}\right),\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \qquad (5)$$

3. Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, силы упругости $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, где численно $F' = F = cx$, и пару с моментом M.

Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата φ получает приращение $\delta\varphi > 0$, а x не изменяется, т.е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). Тогда тележка и центр D катка получают одинаковые перемещения $\delta s_2 = \delta s_D = R\delta\varphi$ и элементарная работа действующих сил равна

$$\delta A_1 = M\delta\varphi - P_2 \sin 30^\circ \cdot \delta s_2 - P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta s_D - F'\delta s_2 + F\delta s_D.$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_1 = \left(M - 0{,}5P_2R - 0{,}5P_3R\right)\delta\varphi = PR\delta\varphi. \qquad (6)$$

Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т.е. $\delta\varphi = 0$ (барабан не поворачивается и тележка не перемещается). Тогда элементарную работу совершают только силы $\overline{P}_3$ и $\overline{F}$, учтя, что $P_3 = 2P$, получим

$$\delta A_2 = P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta x - F\delta x = \left(P - cx\right)\delta x. \qquad (7)$$

Коэффициенты при $\delta\varphi$ и δx в равенствах (6) и (7) и будут искомыми обобщенными силами; следовательно,

$$Q_1 = PR;\ Q_2 = P - cx. \qquad (8)$$

Подставляя величины (5) и (8) в уравнения (1), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g}\left(8R^2\ddot{\varphi} - 3R\ddot{x}\right) = PR,\ \frac{P}{g}\left(-3R\ddot{\varphi} + 3\ddot{x}\right) = P - cx. \qquad (9)$$

4. Для определения $x = f(t)$ исключим из уравнений (9) $\ddot{\varphi}$.

Получим дифференциальное уравнение вида

$\ddot{x} + k^2 x = a$,

где $k^2 = \dfrac{8}{15}\dfrac{cg}{P}$, $a = \dfrac{11}{15} g$. (10)

Общее решение уравнения (10), как известно из высшей математики, имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, т.е. $x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$, а x_2 — частное решение уравнения (10). Будем искать решение x_2 в виде $x_2 = A = \text{const}$. Подставляя значения x_2 в уравнение (10), получим $A = a/k^2$. Таким образом, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt) + a/k^2, \qquad (11)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Для их определения найдем еще производную $\dot{x}$ от x по времени:

$$\dot{x} = C_1 k \cos(kt) - C_2 k \sin(kt). \qquad (12)$$

По начальным условиям при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = 0$ (движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована). Подставляя эти величины в уравнения (11) и (12), найдем из них, что $C_1 = 0$, $C_2 = — a/k^2$.

Окончательно получим искомую зависимость $x = f(t)$ в виде

$$x = \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt), \qquad (13)$$

где значения a и k^2 даются последними двумя из равенств (10). Таким образом, центр D катка совершает по отношению к тележке колебания, закон которых дает равенство (13). Круговая частота k и период τ этих колебаний:

$k = \sqrt{\dfrac{8cg}{15P}}$; $\tau = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{15P}{8cg}}$.

Пример Д8б

Механическая система (рис. Д8 б) состоит из барабана *1* радиуса R , к которому приложена пара сил с моментом M и катка *5* (барабан и каток — однородные цилиндры); веса тел равны соответственно P_1, P_5;. Каток соединен с барабаном намотанной на него нитью и пружиной KF; коэффициент жесткости которой равен c. Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

Дано: $R_1 = R_5 = R$, c, $P_1 = P$; $P_5 = 4P$; $M = PR$; $\alpha = 30^\circ$.

Определить: 1) $x = f(t)$, где x — удлинение пружины (или перемещение центра D катка по отношению к точке K); 2) частоту k и период τ колебаний.

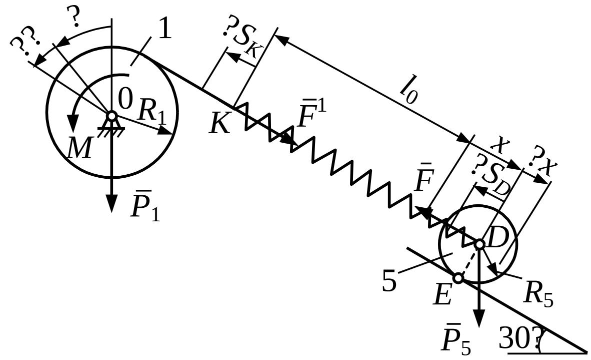


Рис. Д8б

Решение 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана φ и удлинение пружины x ($q_1 = \varphi,\ q_2 = x$). Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2. \qquad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию T системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_5. \qquad (2)$$

Так как барабан вращается вокруг оси O, а каток движется плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2,\ \ T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_5^2 \qquad (3)$$

где

$$I_0 = \frac{m_1 R_1^2}{2},\ m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{P}{g},\ I_0 = \frac{PR^2}{2g}.$$

$$I_D = \frac{m_5 R_5^2}{2},\ m_5 = \frac{P_5}{g} = \frac{4P}{g},\ I_D = \frac{2PR^2}{g}.$$

Все входящие в (3) скорости надо выразить через обобщенные скорости $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$. Очевидно, что $\omega_1 = \dot{\varphi}$. Для определения v_D рассмотрим движение катка как сложное. Получим $\bar{v}_D = \bar{v}_D^{\text{отн}} + \bar{v}_D^{\text{пер}}$, где численно $v_D^{\text{отн}} = \dot{x},\ v_D^{\text{пер}} = R\dot{\varphi}$. Тогда, принимая во внимание, что при возрастании φ и x скорости $v_D^{\text{отн}}$ и $\bar{v}_D^{\text{пер}}$ направлены в разные стороны и что точка E для катка — мгновенный центр скоростей, получим

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\varphi}, \omega_5 = \frac{V_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей и значения I_0 и I_D в равенства (3) и учитывая, что $P_1 = P$; $P_5 = 4P$, получим окончательно из (2) следующее выражение для T:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{PR^2}{2g} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4P}{g} (\dot{x} - R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2PR^2}{g} \left(\frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R} \right)^2 , \tag{4}$$

$$T = \frac{P}{g}(3{,}25R^2\dot{\varphi}^2 - 6R\dot{\varphi}\dot{x} + 3\dot{x}^2)\,.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g}(6{,}5R^2\dot{\varphi} - 6R\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{P}{g}(6{,}5R^2\ddot{\varphi} - 6R\ddot{x});$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g}(-6R\dot{\varphi} + 6R\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{P}{g}(-6R\ddot{\varphi} + 6R\ddot{x}). \tag{5}$$

3. Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_5$, силы упругости $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, где численно $F' = F = cx$, и пару с моментом M:

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата φ получает приращение $\delta\varphi > 0$, а x не изменяется, т.е. $\delta x = 0$ (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину). В системе действуют активные силы момент M и силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_5$. Тогда центр D катка получает перемещение $\delta s_D = \delta s_K = R\delta\varphi$ и элементарная работа действующих сил равна

$$\delta A_1 = M\delta\varphi - P_5 \sin 30^\circ \cdot \delta s_D\,,$$

$$\delta A_1 = (M - P_5 \sin 30^\circ \cdot R)\delta\varphi = (PR - 2PR)\delta\varphi = -PR\delta\varphi\,.$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_1 = (M - P_5 \sin 30^\circ \cdot R)\delta\varphi = (PR - 2PR)\delta\varphi = -PR\delta\varphi \tag{6}$$

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата x получает приращение $\delta x > 0$, а φ не изменяется, т.е. $\delta\varphi = 0$ (барабан не поворачивается). Тогда элементарную работу совершают только силы $\overline{P}_5$ и $\overline{F}$. Учтя, что $P_5 = 4P$, получим

$$\delta A_2 = P_5 \sin 30^\circ \cdot \delta x - F\delta x\,,$$

где $F = cx$, $\delta A_2 = (2P - cx)\delta x$. (7)

Коэффициенты при $\delta\varphi$ и δx в равенствах (6) и (7) соответственно и будут искомыми обобщенными силами; следовательно,

$$Q_1 = -PR, \; Q_2 = 2P - cx. \tag{8}$$

Подставляя величины (5) и (8) в уравнения (1), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{PR}{g}(6{,}5R\ddot{\varphi} - 6\ddot{x}) = -PR, \\ &\frac{P}{g}(-6R\ddot{\varphi} - 6\ddot{x}) = 2P - cx. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Откуда получим $\left.\begin{aligned} &6{,}5R\ddot{\varphi} - 6\ddot{x} = -g, \\ &-6R\ddot{\varphi} - 6\ddot{x} = 2g - \frac{cq}{P}x \end{aligned}\right\}$

4. Для определения $x = f(t)$ исключим из уравнений (9) $\ddot{\varphi}$.

Выразив из первого уравнения системы (9) $\ddot{\varphi}$ и подставив его во второе уравнение системы (9), получим дифференциальное уравнение вида $\ddot{x} + k^2 x = a$,

$$\ddot{\varphi} = \frac{6\ddot{x} - g}{6{,}5R}, \; -6R\left(\frac{6\ddot{x} - g}{6{,}5R} + 6\ddot{x}\right) = 2g - \frac{cg}{P}x,$$

$$\frac{-3\ddot{x} + 6g}{6{,}5} + 6\ddot{x} = 2g - \frac{cg}{P}x, \; -36\ddot{x} + 6g + 39\ddot{x} = 13g - 6{,}5\frac{cg}{P}x,$$

$$3\ddot{x} + \frac{6{,}5}{3}\frac{cg}{P}x = \frac{7}{3}g, \tag{10}$$

где

$$k^2 = \frac{6{,}5}{3}\frac{cg}{P}, \; a = \frac{7}{3}g. \tag{11}$$

Общее решение уравнения (10), как известно из высшей математики, имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 — общее решение однородного уравнения $\ddot{x} + k^2 x = 0$, т.е. $x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$, а x_2 — частное решение уравнения (10). Будем искать решение x_2 в виде $x_2 = A = \text{const}$. Подставляя значения x_2 в уравнение (10), получим $A = a/k^2$. Таким образом, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$x = C_1 \cos\, kt + C_2 \sin\, kt + \frac{a}{k^2}, \tag{12}$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Для их определения найдем еще производную $\dot{x}$ от x по времени:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin\, kt + kC_2 \cos kt. \tag{13}$$

По начальным условиям при $t = 0$ $x = 0$, $\dot{x} = 0$ (движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована). Подставляя эти величины в уравнения (12) и (13), найдем из них, что $C_1 = -\dfrac{a}{k^2}$, $C_2 = 0$.

Окончательно получим искомую зависимость $x = f(t)$ в виде

$$x = -\frac{a}{k^2}\cos kt + \frac{a}{k^2},$$

$$x = \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt), \tag{14}$$

где значения a и k^2 даются в уравнении (11). Таким образом, центр D катка совершает колебания, закон которых дает равенство (14). Круговая частота k и период τ этих колебаний соответственно

$$k = \sqrt{\frac{6{,}5cg}{3P}}, \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{3P}{6{,}5cg}}.$$

Тесты

Динамика точки

1. Динамика изучает:

а) способы преобразования систем сил в эквивалентные системы;

б) движение тел с геометрической точки зрения без учета сил, вызвавших это движение;

в) движение тел под действием сил.

2. Как записывается основной закон динамики (второй закон Ньютона):

а) $\overline{F}_1 = \overline{F}_2$; б); $m\overline{a} = \overline{F}$ в) $m\overline{v} = \overline{F}t$?

3. Содержание второй (обратной) задачи динамики материальной точки состоит:

а) в определении закона движения точки по заданным силам;

б) в определении сил, действующих на точку, по заданному закону движения;

в) в определении кинетической энергии точки.

4. В какой форме составляются дифференциальные уравнения движения при естественном способе задания движения материальной точки:

а) $$m\ddot{x} = \sum F_{kx};\quad m\ddot{y} = \sum F_{ky};$$

б) $$m\frac{dx}{dt} = \sum S_{kx};\quad m\frac{dy}{dt} = \sum S_{ky};$$

в) $$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau};\quad \frac{m}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum F_{kn}\,?$$

5. Что включает в себя группа начальных условий:

а) $t_0 = 0$; x_0, y_0, z_0; б) $t_0 = 0$; $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$; в) $t_0 = 0$; x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$?

6. Как записывается дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки:

а) $\ddot{x} + k^2x = h\sin\,pt$; б) $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$; в) $\ddot{x} + k^2x = 0$?

7. Какой вид имеет закон свободных прямолинейных колебаний материальной точки:

а) $x = Ae^{-nt}\sin(kt + a)$; б) $x = Ae^{-nt}(C_1 t + C_2)$; в) $x = A\sin(kt + a)$?

Общие теоремы динамики

8. Как определяется количество движения материальной точки $\bar{q}_k$:

а) $m_k \bar{a}_k$; б) $m_k v_k^2 / 2$; в) $m_k \bar{v}_k$?

9. Какая формула выражает теорему об изменении количества движения механической системы:

а) $\dfrac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e$; б) $\dfrac{d\overline{L}}{dt} = \sum \overline{M}_k^e$; в) $d\text{T} = \sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^i$?

10. По какой из формул определяется момент количества движения твердого тела относительно оси вращения:

а) $\overline{L}_O = \bar{r} \times \bar{q}$; б) $L_z = J_z \omega$; в) $L_O = mvh$?

11. Регулятор скорости имеет осевой момент инерции $I_z = 4$ кг·м^2 и вращается по инерции вокруг оси z со скоростью $\omega = 3$ с$^{-1}$. Какова будет скорость вращения вала, если осевой момент инерции регулятора станет равен $I_z = 6$ кг·м^2.

а) 1 с$^{-1}$; б) 2 с$^{-1}$; в) 4 с$^{-1}$?

12. Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид:

Ответ: а) $M\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e$; б) $\dfrac{dQ}{dt} = \sum \overline{F}_k^e$; в) $I_z \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum M_z\left(\overline{F}_k^e\right)$.

13. Диск, имеющий осевой момент инерции J, насажен на вал. В некоторый момент времени на вал, находящийся в состоянии покоя, начинает действовать постоянный вращающий момент $M = 1200$ кН·м. В подшипниках имеется постоянный момент сопротивления $M_{\text{с}} = 120$ кН·м. Движение диска будет:

а) замедленное; б) равномерное; в) ускоренное.

14. Механическая система, состоящая из вала и насаженного на него маховика массой $m = 10$ кг с радиусом инерции $i = \sqrt{10}$ м, находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени к валу прикладывают постоянный вращающий момент $M = 120$ Н·м. Какова будет скорость вращения вала через 1 секунду, если трением в подшипниках пренебречь?

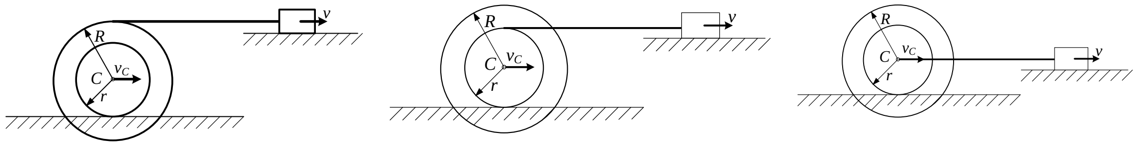
а) 0,12 рад/с; б) 1,2 рад/с; в) 12 рад/с?

15. Как определяется кинетическая энергия тела, совершающего плоскопараллельное движение?

а) $T = \frac{Mv_C^2}{2}$; б) $T = \frac{J_z\omega^2}{2}$; в) $T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_z\omega^2}{2}$?

16. Механическая система состоит из тела *1* массой m_1 и ступенчатого диска *2* массой m_2, имеющего осевой момент инерции J_2 и радиусы большой и малой окружностей R_2 и r_2 соответственно. Определить, для какой схемы составлено выражение кинетической энергии

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left(4m_1 r_2^2 + J_2 + m_2 r_2^2\right)\dot{\varphi}_2^2 \text{ ?}$$



а) б) в)

Элементы аналитической механики

17. Какое уравнение описывает стационарную связь?

а) уравнение, содержащее только координаты;

б) уравнение, содержащее первые производные от координат и время;

в) уравнение, содержащее координаты и время.

18. Какие перемещения называются возможными?

Ответ: а) перемещения, происходящие за бесконечно малый промежуток времени;

б) перемещения, происходящие под действием сил;

в) бесконечно малые воображаемые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями?

19. Возможное перемещение диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно:

а) нулю;

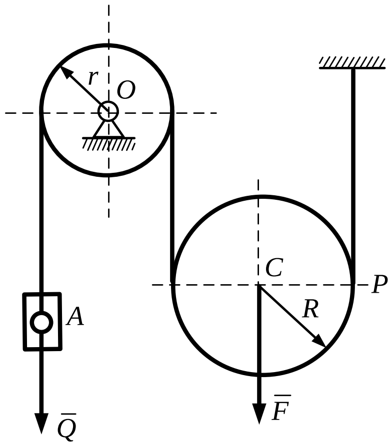
б) возможному угловому перемещению;

в) возможному линейному перемещению точки обода.

20. Принцип возможных перемещений математически формулируется следующим образом:

а) $\delta S = 0$; б) $\sum \delta A_k^a = 0$; в) $\overline{F} + \overline{N} + \overline{\Phi} = 0$.

21. Механическая система находится под действием взаимно уравновешивающих сил. Пренебрегая силами сопротивления, определить с помощью принципа возможных перемещений силу Q, если известна величина силы F.



а) $Q = F$; б) $Q = 2F$; в) $Q = \dfrac{F}{2}$.

22. Какая из записей представляет уравнение Лагранжа второго рода?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = Q_i; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

а) все;

б) первая и вторая;

в) вторая и третья.

Список литературы

1. Смогунов В.В. Теоретическая механика для заочников / Под ред. Н.И. Гордиенко. – Пенза: изд-во ПензГУ, 1995.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для студ. втузов (гриф МО). – 12-е изд., стереотип. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.

3. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1987 г.

4. Теоретическая механика: Методические указания / Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1988.

5. Теоретическая механика: Методические указания / Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1989.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Краткие справочные данные

Таблица П.1

Классификация задач динамики и общих подходов к их решению

<table>
<tr><td colspan="2">Прямые задачи — определение сил по заданному движению</td><td colspan="2">Обратные задачи — движения по заданным силам (основные и наиболее трудные, редко решаемые в квадратурах, применяются приближенные методы интегрирования)</td></tr>
<tr><td colspan="4">1. Эффективность решения зависит от выбора системы координат</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Силы внешние и внутренние используются при решении задач с использованием общих теорем динамики, дифференциальных уравнений вращения а.т.т. вокруг оси, плоского движения а.т.т.</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Активные силы и реакции связей используются при решении задач с помощью уравнений Лагранжа и общего уравнения динамики</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Силами инерции следует пользоваться только при применении: а) метода кинетостатики, б) общего уравнения динамики, в) исследования относительного (либо переносного) движения точки или системы материальных точек</td></tr>
<tr><td colspan="4">Общий подход к решению задач динамики</td></tr>
<tr><td>материальной точки</td><td colspan="2">системы материальных точек</td><td>абсолютно твердого тела</td></tr>
<tr><td>Применение дифференциальных уравнений движения точки</td><td colspan="2">Применение уравнений Лагранжа либо общего уравнения динамики</td><td>Применение теоремы о движении центра масс системы материальных точек при поступательном движении; дифференциальных уравнений при вращательном и плоском движении</td></tr>
<tr><td colspan="4">Первые интегралы дифференциальных уравнений движения можно сразу получить, используя общие теоремы динамики</td></tr>
</table>

Таблица П.2

Общие теоремы динамики точки системы

Общие теоремы динамики точки	Общие теоремы динамики механической системы
1. Уравнения движения $m\bar{a} = m\dfrac{d\bar{v}}{dt} = m\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e$	Теорема о движении центра масс $M\bar{a}_c = M\dfrac{d\bar{v}_c}{dt} = M\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e$ $M = \sum m_k$
2. Теорема об изменении количества движения (импульса)	
$d(mv) = \sum \bar{F}_k dt = d\bar{S}^e$; $d\bar{K} = d\bar{S}^e \quad \bar{K} = m\bar{v}_k$; $d\bar{S}^e = \sum \bar{F}_k^e dt$	$d(M\bar{v}_c) = d\bar{s}^e$; $d\bar{k} = d\bar{s}^e$. $\bar{k} = \sum mv_k$; $d\bar{s}^e = \sum \bar{F}_k^e dt$
3. Теорема об изменении момента количества движения (кинетического момента)	
$\dfrac{d}{dt}(\bar{r} \cdot m\bar{v}) = \bar{r} \cdot \sum \bar{F}_k^e$; $\dfrac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_0^e$; $\bar{L} = \bar{r}_0 \cdot m\bar{v}$; $\bar{M}_0^e = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_n^e) = \bar{m}_0(\bar{R}^e)$	$\dfrac{d}{dt}\sum(\bar{r}_k \cdot m_k\bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \cdot \bar{F}_k^e$; $\dfrac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_0^e$; $\bar{L}_0 = \sum(\bar{r}_k \cdot m_k\bar{v}_k) = \sum M_0(m_k\bar{v}_k)$ $\bar{M}_0^e = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_n^e)$
4. Теорема об изменении кинетической энергии	
$d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = dA^2$; $\underline{dT = dA^e}$ $T = \dfrac{mv^2}{2}$; $dA^e = \sum \bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k$	$d\sum\dfrac{m_k v_k^2}{2} = dA^e + dA^i$; $dT = dA^e + dA^i \quad T = \sum\dfrac{m_k v_k^2}{2}$; $dA^e = \sum \bar{F}_k^e d\bar{r}_k$; $dA^i = \sum \bar{F}_k^i d\bar{r}_k$; $dT = dA^e$

Таблица П.3

Основные задачи динамики

1. Задачи динамики точки. Дифференциальные уравнения $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\Phi\left(t,x,\dfrac{dx}{dt}\right)$ интегрируются, если они линейны. Первые интегралы могут быть получены с использованием теорем:

1.1. $m\bar{v}_1-m\bar{v}_0=\sum t\int\limits_0^{t_1}Fdt$ в задачах, где $\bar{F}-const$ или $\bar{F}(t)$ и дано $m,\bar{F},t_0...t_1,\bar{v}_0...\bar{v}_1$.

1.2. $d\bar{K}=d\bar{S}^e$ в задачах, где $\bar{F}$ — центральная и дано $m,\bar{r}_0...\bar{r}_1,\bar{v}_0...\bar{v}_1$.

1.3. $dT=dA^e$ в задачах, где $\bar{F}-const$ или $(\bar{F}(\bar{r})$ и дано $m,\bar{F},\bar{r},\bar{v}_0...\bar{v}_1,\bar{F}_{rp}$

2. Задачи динамики системы. Дифференциальные уравнения составляются применением уравнений $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dT}{dq_i}\right)-\dfrac{dT}{dq_i}=Q_i$ либо общего уравнения динамики $\sum\delta A_k^a+\sum\delta A_k^n=0$ и решаются с использованием теорем:

2.1. $M\bar{a}_c=\bar{R}^e$ в задачах, где даны m_k, $\bar{F}_k^e$ и уравнение движения центра масс или точек системы.

2.2. $\bar{Q}_1-\bar{Q}_1=\sum S_k^e$ в задачах, где даны m_k, $\bar{F}_k^e$, $t_0...t_1$, $\bar{v}_0...\bar{v}_1$, если $\bar{F}_k^e-const$, либо $\bar{F}_k^e=f(t)$.

2.3. Если в состав системы входит а.т.т., вращающееся вокруг оси, и даны M, J_z, уравнения точек и вращения а.т.т., $\bar{F}_k^e$, то используется теорема $\dfrac{dK_0}{dt}=\sum\bar{m}_0(\bar{F}_k^e)$. Если $\bar{F}_k^e-const$ либо $\bar{F}_k^e=f(r)$ и даны M, J_z, $\bar{F}_k^i$, x_i, $\bar{v}_{x0}...\bar{v}_{x1}$, то используется теорема $T_1-T_0=\sum A_k^e+\sum A_k^i$

3. Задачи динамики твердого тела.

3.1. Поступательное движение: при составлении уравнений движения используется теорема о движении центра масс системы. Первые интегралы получаем из теорем:

3.1.1. $\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum S_k^e$, когда $\overline{F}_k^e$ и $\overline{F}_{ki} - const$ или $\overline{F}_k = f(t)$ и даны M, $\overline{F}_k^e$, $t_0 ... t_1$, $\bar{v}_{c_0} ... \bar{v}_{c_1}$.

3.1.2. $T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$, когда $\overline{F}_k - const$, или $\overline{F}_k\,(r)$ и даны M, $\overline{F}_k^e$, $\Delta\bar{x}_c$, $\bar{v}_{c_0} ... \bar{v}_{c_1}$.

3.2. Движение твердого тела вокруг неподвижной оси — первые интегралы дифференциального уравнения $J_z \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e$ можно получить, используя теоремы:

3.2.1. $T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$ когда $M^e - const$, или $M^e = f(\varphi)$ и даны J_z, $\overline{F}_k^e$, $\Delta\varphi_c$, $\omega_0 ... \omega_1$.

3.2.2. При определении динамических давлений на ось нужно использовать
$M_{\bar{a}_c} \cdot = \overline{R}^e$; $\dfrac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e)$.

3.3.3. Плоское движение твердого тела — интегрирование дифференциальных уравнений упрощается при использовании теоремы $T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$ в задачах, где главный вектор и главный момент всех сил $const$ либо $f(\varphi)$, даны $M, J_z, \Delta\varphi$, $\omega_0 ... \omega_1$

Таблица П.4

Интегралы

Интегралы функций	
$\int dx = x + C$ Степенные $\int x^{a} dx = \frac{x^{a+1}}{\alpha+1} + C(a \neq -1)$, $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$, Тригонометрические $\int \sin kx dx = \frac{1}{k}\cos kx + C$, $\int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$, $\int tgx dx = \ln(\cos x) + C$, $\int ctgx dx = \ln(\sin x) + C$, $\int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k} tgkx + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k} ctgkx + C$	Показательные $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$, $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$, $\int x^{n} e^{kx} dx = \frac{1}{k} x^{n} e^{kx} - \frac{n}{k}\int x^{n-1} e^{kx} dx$, Гиперболические $\int shx dx = chx + C$, $\int chx dx = shx + C$, $\int thx dx = \ln chx + C$, $\int cthx dx = \ln\lvert shx\rvert + C$, $\int \frac{dx}{ch^2 x} thx = +C$, $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
Прочие интегралы	
$\int \frac{dx}{1+e^{kx}} = -\frac{1}{k}\ln\frac{e^{kx}}{1+e^{kx}} + C$, $\int \sin_2 kx dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4k}\sin 2kx + C$,	$\int e^{kx}\cos adx = \frac{e^{kx}}{k^2 + a_2}\left(k\cos ax + a\sin ax + c\right)$